

CM08 230926T

Announcements

1. Messages from Instructor

- Classify and Update
- Simplify and Visualize:
 - essence, generalize, consider extremes,
 - Venn diagram, necessary and sufficient,
 - block diagram, $G(V,E)$; graph of a function, algebraic vs. geometric
- Time, Focused Action, Experience, Lesson, Feedback, Fix, Growth
- Stop and Think
- Self-Fulfillment and Contribution to Collective

2. 지난 강의 수정/보완 사항

3. HW and Quiz

- HW04 will be assigned. Due will be next Thursday.

4. 강의 자료

- Handouts and annotated pdfs are downloadable from the non-PLMS class homepage at <http://cisl.postech.ac.kr/class/eece233/schedule.htm>.
- Recorded CMs are available from cisl.postech YouTube channel. Please place **clickable time stamps**.

5. 출석

- 출결상태에 대해 전자출결시스템(<https://wpsc.postech.ac.kr/eams/login>)을 확인하세요. 정정사유가 있는 학생은 증빙을 제출해 주세요.
- 지난 CM#7은 모두 출석으로 처리해 놓겠습니다.

6. Overview (The numbers are the chapter numbers of the textbook)

1. Signals and Systems

2. Linear Time-Invariant Systems

3. Fourier Series Representation of Periodic Signals

4. Continuous-time Fourier Transform

5. Discrete-time Fourier Transform

6. Time and Frequency Characterization of Signals and Systems

9. Laplace Transform

10. Z-transform

7. Sampling

8. Communication Systems

7. Review

• Linear system

- Def. A system is linear if it satisfies the **superposition** principle, i.e., $x_1 \rightarrow y_1$ and $x_2 \rightarrow y_2 \Rightarrow ax_1 + bx_2 \rightarrow ay_1 + by_2$

cf) affine

Proposition. (**alternative definition**) more than 2 signals

Def. A CT system satisfies the initial rest condition if ...

Theorem. Given a CT **linear** system, it is **causal** iff it satisfies the **initial rest** condition.

• Time-Invariant System

- Def. A CT system is **time-invariant** if the choice of the time origin doesn't matter, i.e., $x_1 \rightarrow y_1 \Rightarrow \text{delayed } x_1 \rightarrow \text{delayed } y_1$

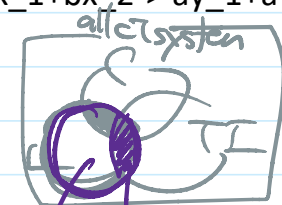
antonym: time-variant, time-varying

Lemma. If a CT system is memoryless, then it is TI.

Theorem. If the input to a CT TI system is periodic, then its output is also periodic with the same period.

• Linear Time-Invariant System

- Example



LTI
TI

Theorem. If the input to a DT system is periodic, then its output is also periodic with the same period.

↓
LTV

- LTI

- Linear Time-Invariant System

- Example
- Generalize?

8. Preview

- Def. the **Kronecker Delta** function, the **unit sample** function
 - Lemma. A DT signal $x[n]$ can be represented by ...
- Def. **Impulse response** of a DT linear system
 - Lemma. Impulse response of a DT **LTI** system
 - Examples
 - ◆ identity system
 - ◆ delay system
 - ◆ sum
 - Theorem. I/O relation of a DT LTI system in terms of ...
 - Def. the convolution sum(mation)
 - ◆ cf) convolutional neural network (CNN)
 - $y[n] = x[n] * h[n]$
 - Implication
 - Interpretations
 - ◆ delayed weighted sum of impulse response

EECE233 Signals and Systems

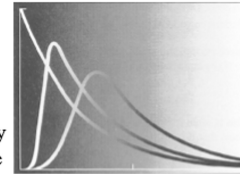
Lecture Note #3

Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

(Slides thanks to Qing Hu¹, D. Boming, D. Freeman, I. Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O & W pp. 74-90, 104-108
- 1 Representation of DT signals in terms of shifted unit samples
- 2 **Convolution** sum representation of DT LTI systems
- Examples
- The unit sample response and properties of DT LTI systems



* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.

Lec. note #1에서는 signals에 대해,¹
Lec. note #2에서는 systems에 대해 대략 배웠다.
이제 Lec. note #3에서는 discrete-time system에 대해 좀 더 자세히 배운다. 그렇다면 Lec. note #4에서는? → continuous-time system에 대해 좀 더 자세히 배운다.

"representation"은 말 그대로
re-present하는 것이다. 즉, 같은 것을 다르게 나타내는 것이다.
(연구라는 단어 research도 re-search '또 찾아보는 것' 이라고들 한다.)

re-representation은 수학적 조작 과정이나 논리 전개 과정에서
가장 중요한 방법중의 하나이다.
이 과목 뿐만 아니라 이론적인 과목들에서 중요한 개념이다. 명심!

본 lec. note 에서는
1. a DT signal의 a representation과
2. a DT LTI system의 a representation에 대해 배운다.
둘 다 매우 중요하다.

Exploiting Superposition and Time-Invariance

Exploiting Superposition = Linearity

Recall that a DT system is linear iff $x_k[n] \rightarrow y_k[n]$ for all k implies

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Question: Are there sets of “basic” signals $x_k[n]$ such that

- We can represent *any* signal as a linear combination of these building block signals.
- The responses of a linear system to these basic signals are both *simple* and *insightful*.

Fact: For linear systems (CT or DT) there are two natural choices for these building blocks

Focus for now: DT Shifted unit samples $\delta[n-n_0]$

Next time: CT Shifted unit impulses $\delta(t-t_0)$

the Kronecker delta function located at n_0

the Dirac delta function located at t_0

2

Dirac delta function은 distribution 또는 generalized function의 일종으로 엄밀한 의미에서의 function이 아닙니다. 수학에서는 function이 아니라 distribution이라 하여 다룬다.

Lecture note #3에서는 DT LTI system에 대해 보다 심도있게 배운다. 특히 time domain에서의 property를 배운다.

앞서 note #2의 마지막에서 system이 LTI system임을 이용하여 주어진 input-output example로 부터, 어떤 특별한 input이 주어졌을때 그 output을 구하는 것을 해 보았다. 여기서는 이 아이디어를 확장한다.

output example로 부터, 어떤 특별한 input이 주어졌을때 그 output을 구하는 것을 해 보았다. 여기서는 이 아이디어를 확장한다.

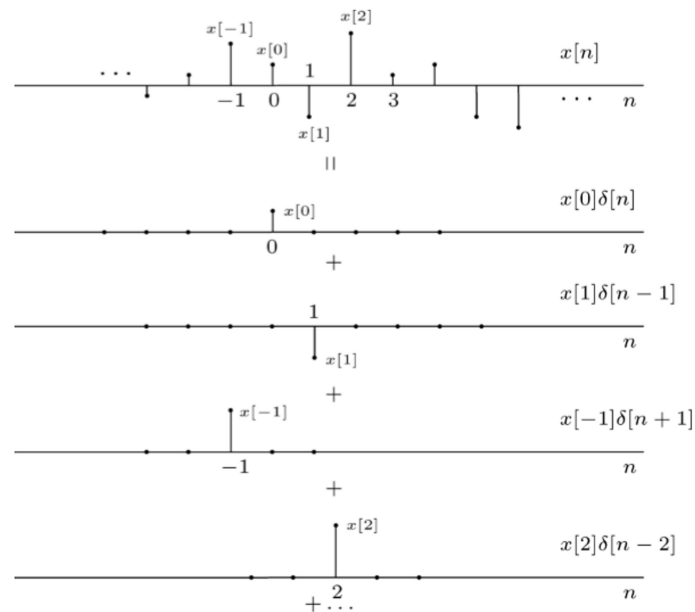
앞서 example에서의 핵심은 LTI = linear + time-invariant임을 기억하고 이를 이용하는 것이었다.

LHS → RHS 이 과정을 보다 정확히 쓰면

$$\begin{aligned}
 (y[n])_n &= L((x[n])_n) \\
 &= L(\sum_k a_k x_k[n])_n \\
 &= L(\sum_k a_k (x_k[n])_n) \\
 &= \sum_k a_k L((x_k[n])_n) \\
 &= \sum_k a_k (y_k[n])_n \\
 &= (\sum_k a_k y_k[n])_n
 \end{aligned}$$

이다.

Representation/Decomposition of DT Signals Using Unit Samples

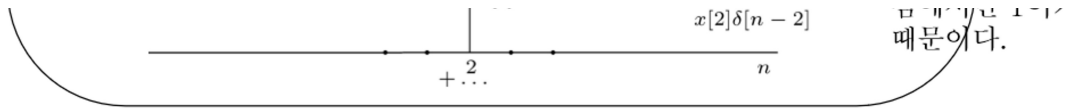


using scaled and shifted Delta functions

$(\delta[n-a])_n$ 의 "그래프"는

$(\delta[n])_n$ 의 "그래프"를 오른쪽으로 a만큼 이동한 것과 같다. 왜냐하면 argument가 0 지점에서만 1이기 때문이다.

a time function
start of n



a time function
 $\delta[n-k]$ of n .

$$\underline{x[n]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad \underline{\forall n \in \mathbb{Z}}$$

That is ... $x[k] \delta[n-k]$ 에서 $k, -k$ 로 부호가 반대인 것에 주의한다.

$$x[n] = \dots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \dots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}} \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}}, \text{ for all } n$$

Important to
note the "-" sign

summand and
integrand
cf) divisor vs.
dividend

Q. RHS에서
countably
infinite개의 실
수의 합은 잘 정
의되는가?

The Sifting Property of the Unit Sample

sift: 채로 치다. "shifting"이 아님.
(2001년에 대학원 강의에서 shifting이라고 했다가 망신당한 적이
있음.)

A. This representation of $x[n]$ is well defined.
일반적으로 infinite sum이 나타나면 항상 주의해야 하나 다행히
여기서 $x[n]$ 의 infinite sum은 각 n 에 대해 오직 한 term만이 nonzero이므로
convergence문제에 대해 걱정할 필요가 없다.
(countably infinite 개의 0과 $x[k]$ 를 더하는 것이므로 덧셈에 문제가 없다.)

여기서 $x[n]$ 의 infinite sum은 각 n 에 대해 오직 한 term만이 nonzero이므로 convergence문제에 대해 걱정할 필요가 없다.
(countably infinite 개의 0과 $x[k]$ 를 더하는 것이므로 덧셈에 문제가 없다.)

Response of DT LTI Systems

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Def. Now suppose the system is LTI, and define the unit sample response $h[n]$:

$$\delta[n] \xrightarrow{\text{the impulse}} h[n]$$

↓

the impulse response
($h[n]$)_n은 DT signal로서, 주어진 system에 $\delta[n]$ 이 입력되었을때의 response이다.

Lemma. From **T**ime-**I**nvariance:

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

Theorem. From **L**inearity and Time-Invariance, the I/O rel. of an LTI system is

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Convolution convolution sum

Implication.
⇒
Interpretation

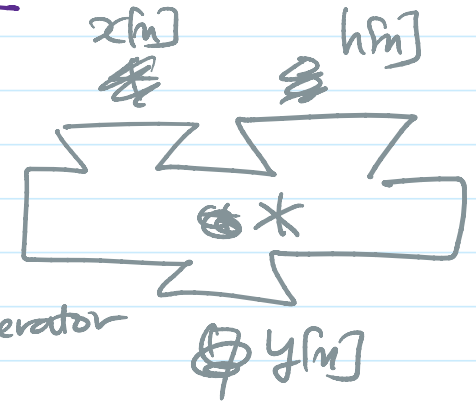
Q/N
한정된 신호
Convolution

A1. 고등학교때 배운 sum of a sequence인 a series는 an ordered sum of real numbers였다. 그러나 위의 합은 a non-ordered sum of countably infinite real numbers이다.

A2. 순서를 정하지 않은 countably infinite positive/negative real numbers의 합은 not well defined!!!

만약 모든 항이 non-negative 이면 잘 정의된다. a finite real number로 수렴하거나 diverges to infinity이다.

그러나 양수와 음수가 섞여 있다면 더하는 순서에 따라 수렴값이 달라



operator

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}(\cdot)} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{L}(x[n]) \\ &= \mathcal{L}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \mathcal{L}(\delta[n-k]) \\ &\equiv h_k[n] \end{aligned}$$

Linearity
IF

Q1. RHS의 +- infinity로 가는 이 합은 어떻게 정의되는가?
Q2. 잘 정의되는가?

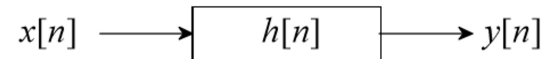
만약 모든 항이 non-negative 이면 잘 수렴한다. a finite real number로 수렴하거나 diverges to infinity이다.

그러나 양수와 음수가 섞여 있다면 더하는 순서에 따라 수렴값이 달라질 수 있다.

주의. alternating series 의 수렴에 대한 정리... 해석학에서 absolute convergence를 왜 배우는지 알겠다?!

$$\equiv h_k[n] \\ = h_0[n-k]$$

Response of DT LTI Systems



Def. Now suppose the system is **LTI**, and define the *unit sample response* $h[n]$:
unit sample response = impulse response

$$\delta[n] \longrightarrow h[n]$$

(h[n])_n 은 DT signal로서, 주어진 system에 Delta[n]이 입력되었을때의 response이다.

Lemma. From **Time-Invariance**:

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

Theorem. From **Linearity** and Time-Invariance, the I/O rel. of an LTI system is

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]}_{\text{convolution sum}} = x[n] * h[n]$$

5

Q. What is the impulse response of a DT linear system, not necessarily time invariant?

A. 일반적인 DT linear system의 impulse response는 $(h[m,n])_n = L(\delta[n-m])_n$.

$L(\delta[n-m])_n$.

자, 이제 output이 input과 impulse response의 convolution sum이 된다는
이 결과를 음미해 보자.

Very Important Property of LTI Systems:

Theorem. The output of *any* DT LTI System is a
convolution of the input signal with the unit-sample
response, *i.e.*

DT LTI $\Leftrightarrow$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

As a result, any DT LTI Systems are *completely
characterized* by its unit sample response

A characterizes B. 수학이 많이 나오는 이론에서 "characterize"라는 동사는
매우 중요한 용어이다. 예를 들어, random variable의 characteristic function은????

엄밀히 말해

$$(y[n])_n = (x[n])_n * (h[n])_n$$

라 써야 하겠다
만 아무도 ...

수식을 "음미" 또는 interpret할 수 있어야 한다.

이 식이 roughly 말하는 것은, "input이 무엇이든 그 output을 구하기 위해서는 input과
impulse response를 convolution하기만 하면 된다"는 것이다.
즉, "이 system의 모든 특성이 $(h[n])_n$ 에 담겨 있다"는 것이다. 이를 "DT LTI systems
are completely characterized by its unit sample response"라고 표현하였다.

사실 화살표 왼쪽에서 오른쪽으로의 전환은 obvious하지 않다.

사실 화살표 왼쪽에서 오른쪽으로의 전환은 obvious하지 않다.

The statement

"By definition of an LTI system, the left side implies the right side." 는 수학적으로 엄밀하게는 참이 아니다. -_-;

Why?

Q. What is the definition of the convergence of a series?

Q. What is the rearrangement of an infinite sum?

Q. What are the definitions of absolute convergence and conditional convergence of a series?

여기서 다시 infinite sum이 나타나는데, 일단은 $y[n]$ 이 모든 n 에 대해 수렴(?) 한다고 생각하자.

Q. DT linear system의 arbitrary input과 time-varying impulse response의 관계는?

$$\begin{aligned} A. (y[n])_n &= L((x[n])_n) \\ &= L(\sum_k x[k] (\delta[n-k])_n) \\ &= \sum_k x[k] L((\delta[n-k])_n) \\ &= \sum_k (h[n-k])_n x[k] \\ &= (\sum_k h[n,k] x[k])_n \end{aligned}$$

이다. time-invariance implies

$$L((\delta[n-k])_n) = (h[n,k])_n = (h[n-k])_n$$

LTV system은 후에 대학원에서 time-varying channel model다룰때 다시 나온다. 그때, 배운 적 없다고 말하지 말 것!!!!

cf) input이 $N \times 1$ 이고 output이 $N \times 1$ 인 linear system이 identity system일때 이 system을 matrix로 characterize하라.

