

CM28 231205T on Unilateral LT, ZTF

Announcements

1. Messages from Instructor

- Goal of Life: Self-Fulfillment and Contribution to Collective (자아실현, 공동체 기여)
 - Attitude: Exceed the expectations! (기대를 넘어서라!)
 - Drive yourself by fear and dream.
- "아는 것이 힘이다. 배우고야 무슨 일이든 한다." -심훈, 상록수-
- 학습 (배우고 익히기)
 - Theory Learning (이론 배우기)
 - Problem Solving (문제 풀기)
 - 배우기와 익히기의 균형
- How to Learn
 - Stop and Think; 복기가 chess master 를 만든다; Find commonality, similarity, and difference
- How to Practice

Purposeful practice with 3F: Time, Focused Action (무엇을 향상시키려는 훈련인가?; Push oneself little bit out of the COMFORTABLE ZONE), Experience, Lesson, Immediate Feedback (코치의 중요성), Fix, Growth
- How to solve? How to understand? ((S))implify and ((V))isualize:
 - essence, simplify; generalize; consider extremes; mental representation, representational examples;
 - Venn diagram, necessity and sufficiency, existence and uniqueness/plurality
 - An imperfect classification rule is better than no classification rule as long as you recognize the imperfection and update your rule.
 - block diagram, G(V,E); graph of a function, algebraic vs. geometric interpretations, mathematical vs. physical/engineering interpretations/implications

2. 지난 강의 수정/보완 사항

- only inductor -> only capacitor
- numerator N(s), denominator D(s)
 - differentiator only = inductor only
 - integrator only = capacitor only
- mathematically equivalent but implementationally different
- zero **at infinity** and pole **at infinity**

$$\text{ex/ (9.23)} \quad H(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

$$\begin{cases} \text{zero } 1\text{th} \\ \text{pole } 2\text{th} \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} \text{zero } 1\text{th} @ 1 \\ \text{zero } 1\text{th} @ -2 \\ \text{pole } 2\text{th} \end{cases}$$

$$\left(\frac{N(s)}{D(s)} \right) \leftarrow \frac{N(s)}{D(s)} \leftarrow \dots$$

- integrator only = capacitor only
- mathematically equivalent but implementationally different
- zero at infinity and pole at infinity

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{N(s)}{D(s)} &\leftarrow \frac{M}{N} \\ &\Rightarrow M-N \text{ poles @ } \infty \\ (ii) \quad M < N \\ &\Rightarrow N-M \text{ zeros @ } \infty \end{aligned}$$

[zero 171 @ ∞
pole 271]

3. HW, Quiz, Voluntary Project, and Exam

- Final Exam is approaching. Unless basic mandatory courses have conflicting schedules, it will be taken 7 pm to 11pm on Thursday Dec. 21 at LG 102.
- Voluntary Project
 - Topic must be approved before final exam. Topics related to this course material is acceptable.
 - Presentation file and presentation mp4 of length >20 minutes must be submitted.
 - No reuse, double use, etc.
- There may be a supplementary CM. No attendance required.
- HW14 will be assigned. Due will be next Tuesday.

4. 강의 자료

- Handouts and annotated pdfs are downloadable from the non-PLMS class homepage at <http://cisl.postech.ac.kr/class/eece233/schedule.htm>.
- Recorded CMs are available from cisl.postech YouTube channel. Please place clickable time stamps.

5. 출석

- 출결상태에 대해 전자출결시스템(<https://wpse.postech.ac.kr/eams/login>)을 확인하세요.
정정사유가 있는 학생은 증빙을 제출해 주세요.

6. Overview (The numbers are the chapter numbers of the textbook)

1. Signals and Systems
2. Linear Time-Invariant Systems
3. Fourier Series Representation of Periodic Signals
4. Continuous-time Fourier Transform
5. Discrete-time Fourier Transform
6. Time and Frequency Characterization of Signals and Systems
9. Laplace Transform
10. Z-transform
7. Sampling
8. Communication Systems

7. Related Courses offered in 24-1

- EECE302 전자수학 A (확률 및 랜덤프로세스); 월수 2시; 신호및시스템
- EECE361/DISU361 전자파응용; 화목 11시; 전자기학 개론
- EECE441 디지털통신개론; 월수 11시; 신호및 시스템, 전자수학

- EECE442/NGCN301 통신및네트워크개론; 화목 2시
- EECE443/NGCN302 통신및네트워크실험; 월5시-10시
- EECE451 디지털신호처리개론; 화목 3시반; 신호및시스템
- 이번 학기말에는 융합부전공 신청 기간은 12월 4일부터 12일까지

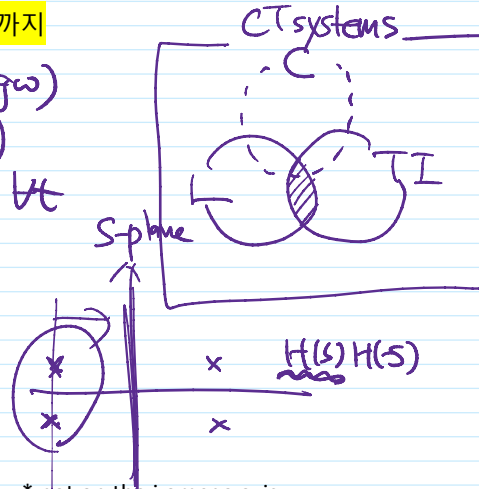
8. Review

- How to design the frequency response of a
 - causal
 - stable
 - CT LTI system
 - with a real-valued impulse response
- by designing the system function $H(s)$ in the form of
 - a rational function of s with
 - ◆ real poles and zeros on the LHP,
 - ◆ conjugate pairs of poles and zeros on the LHP, and
 - ◆ the ROC containing the $j\omega$ axis.
- 1st, design a rational function $H(s)H(-s)$ of s by placing
 - real poles and zeros $p, -p, z, -z$ not at the origin
 - conjugate pairs of poles and zeros, $p, p^*, -p, -p^*, z, z^*, -z, -z^*$ not on the $j\omega$ axis
- 2nd, adjust the phase response by using all-pass systems
- 3rd, put additional delay factor $e^{-(sT_0)}$
- ex/ the n -th order Butterworth filter as a LPF with cutoff frequency ω_c

$$H(j\omega) = H^*(j\omega)$$

$$H^*(s) = H(-s)$$

$$h(t) = h^*(t), \text{ but}$$



$$\text{CTD} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

$$\text{(ii) FD} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega)$$

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=j\omega} & \text{if real} \\ \neq H(j\omega) & \text{h(t)} \end{cases}$$

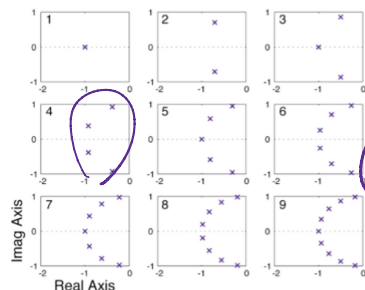
An exercise based on this intuitive understanding

Design a good low-pass filter

Two important features for a good filter:

- $|H(j\omega)|$ is flat within the passband, and
- $|H(j\omega)|$ decreases rapidly in the stopband.

Then how about place all the poles *evenly* along a *semi-circle* (all the poles must be in LHP for stability) to make a flat tent top? (Actually, this is how we make a flat drum top.) $\Rightarrow$ **Butterworth filter.**



The system function of the n -th order Butterworth filter, $H_n(s)$, is obtained from the property

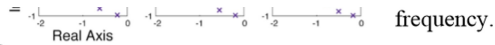
$$H_n(s)H_n(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2n}}$$

where ω_c is the cut-off frequency.

n -th order Butterworth filter 는 n 개의 LHP pole 을 갖고 원점과 pole 간의 거리는 ω_c 이다.

주의할 점은 $s = \omega_c$ 로부터 원상에 등간격으로 pole 을 배치하면 n 이 짝수일때 pole 이 $s = j\omega_c$ 에 나타나게

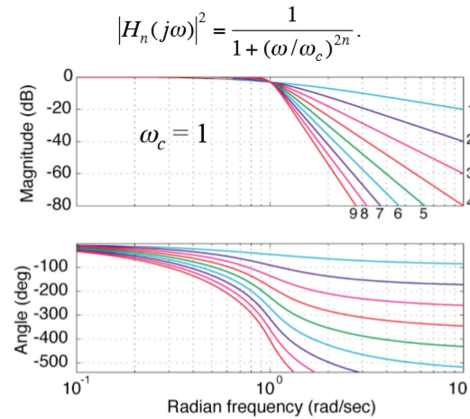
LHP poles
real coeffs
ft. of s



7

등간적으로 pole을 배치하면
 n 이 짝수일때 pole이 $s = j\omega$ axis상에 나타나게 된다.
 이를 막기 위해 n 이 짝수일때는 pole의 위치를 돌린다.
 그래서
 $H_n(s)H_n(-s) = 1/(1 + (s/\omega_c)^{2n})$ 이 아니라 j 가 들어있다.

Frequency response of Butterworth filters



As more *poles* are added (higher-order Butterworth filter), the LPF gets better. **MATLAB Demo.**

8

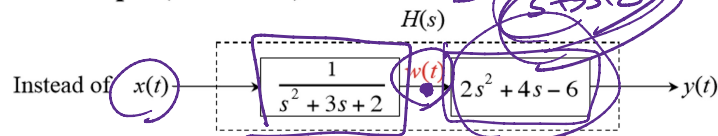
○ CT LTI system with I/O relation in an LCDE

direct form

- intermediate signal $w(t)$
- a serial interconnection of two systems
- weighted sum of derivatives of $w(t) = x(t)$, weighted sum of derivatives = $y(t)$

ex

Example (continued)



We can construct $H(s)$ in the following:

$$y(t) = 2 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 4 \frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

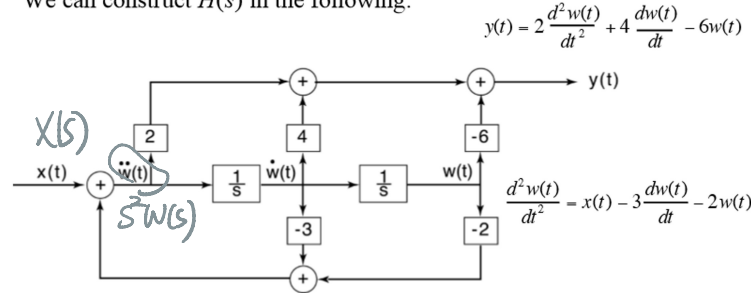
$$y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = 2x^{(2)}(t) + 4x^{(1)}(t) - 6x(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

$$Y(s) = (2s^2 + 4s - 6) W(s)$$

$$y(t) = 2\ddot{w}(t) + 4\dot{w}(t) - 6w(t)$$

We can construct $H(s)$ in the following:



Notation: $1/s$ — an integrator

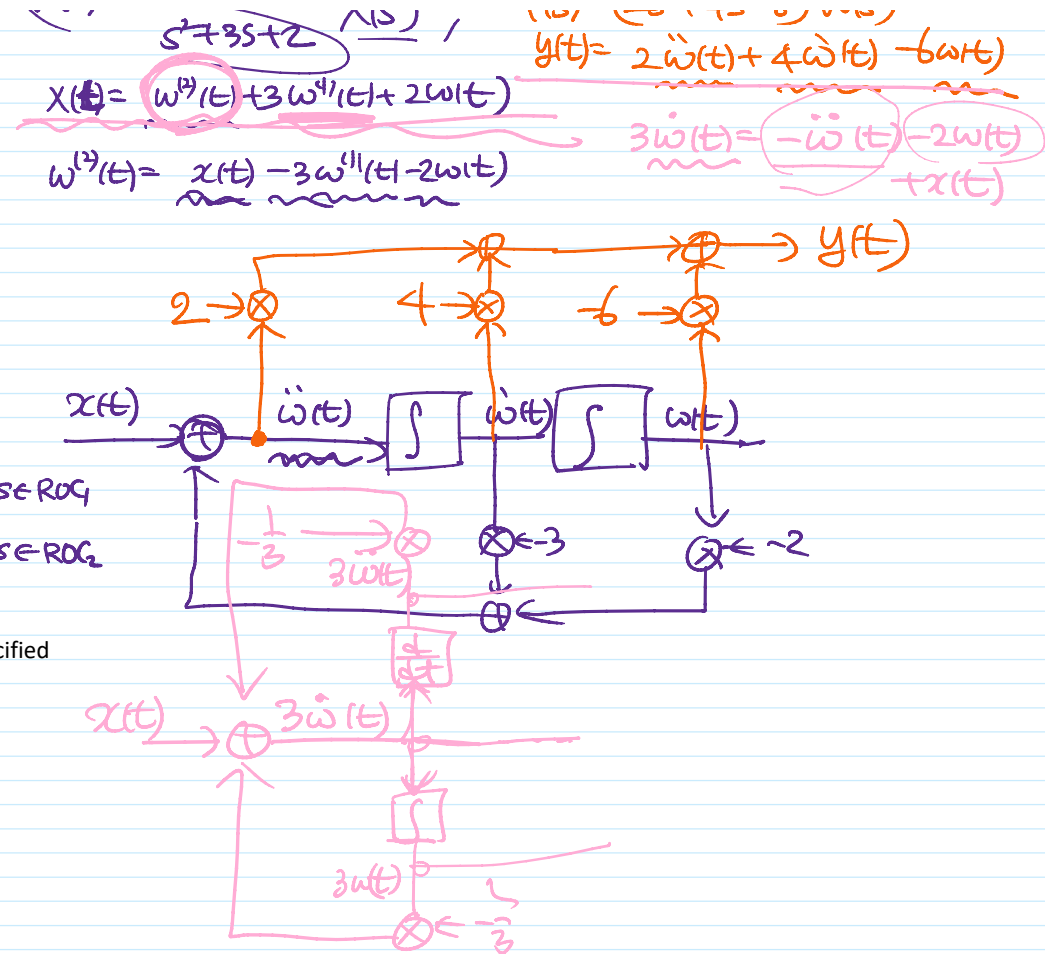
11

$$x_1(t) \neq x_2(t) \quad x_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad s \in \text{ROC}_1$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s \in \text{ROC}_2$$

9. Preview

- Unilateral LT
 - Def. ... 0^- ...
 - Lemma. If $h(t)$ is known to be causal and $H(s)$ be rational, then the ROC needs not to be specified to find $h(t)$.
 - Use Case
 - causal CT system
 - with I/O relation in LCCDE
 - with causal input signal, and
 - not in the initial rest
 - ex) RLC circuit with initially charged capacitor, inductor, etc.
- Integration Property
 - Lemma. If $x(t)$ is causal, then $\int x(t)$ has the ULT ...
- Differentiation Property
 - Lemma.
 - ex)
 - ZIR = homogeneous solution
 - ZSR = particular solution
- Initial-value and Final-value Theorems



LCCDE로 input-output이 나타나는 system중에서 LTI만이 유용한 것은 아니다.
initial condition이 있어서 zero-input zero-output이 아닌 유용한 system이 많다. 이를 다루기 위한 것이 unilateral Laplace transform이다.

ULT은 initial rest condition을 만족하지 않는 LCCDE에 causal signal 입력이 가해질 때 출력 계산에 주로 사용된다.

이런 system은 nonlinear system이지만 그래도 LTI에 가장 가까운 것들이라 분석하는 법이 유사하다.

Q. BLT와의 차이는, ROC에 대해 더 언급할 필요가 없다는 것이다. why?

A. causality를 가정하고 있으므로

The Unilateral Laplace Transform

(THE tool to analyze causal CT systems described by LCCDE's with initial conditions)

Definition: $\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \mathcal{UL}\{x(t)\}$

- 1) If $x(t) = 0$ for $t < 0$, then $\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(s)$
- 2) Unilateral LT of $x(t) = \text{Bilateral LT of } x(t)u(t)$
- 3) For example, if $h(t)$ is the impulse response of a causal LTI system, then
 $H(s) = \mathcal{X}(s)$
- 4) Convolution property: If $x_1(t) = x_2(t) = 0$ for $t < 0$, then

$$\mathcal{UL}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$$

Same as bi-lateral Laplace and Fourier transform

12

"causal signal의 LT은 ULT과 같다. 따라서 신호가 causal이라는 것이 알려져 있다면 IULT하는 것은 causal하도록 ILT하는 것과 같다."

즉, right-sided exponential $e^{at}u(t)$ 의 ULT은 $1/(s-a)$ 이고 ROC는 $\text{Re}(s-a) < 0$ 인데, ULT이 $1/(s-a)$ 이라면
이의 IULT은
이의 LT중 causal한 $e^{at}u(t)$ 가 된다.
여기서 알수 있는 바와 같이 ULT에서는 ROC가 자명하게 얻어진다.

Dirac delta를 어떻게 정의 하더라도 0에서 부터 적분 할때 잘려 나가는 일이 없도록 하기 위함.

이를 위해서 $u(t)$ 는 right-continuous unit step function으로 정의되어야 한다.

즉, causal system의 ULT을 구하기 위해서는 그 causal system의 LT을 구하면 된다.

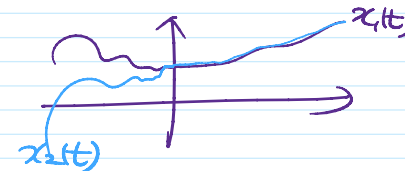
둘다 causal signal이면 convolution도 causal하다. 따라서 LT과 ULT은 같다.

즉, causal signals의 convolution의 ULT을 구하려면 각각 LT하여 곱하면 된다. The ULT of the convolution of two causal signals equals the product of the ULTs of the causal signals.

$$x_1(t) = x_2(t), t \geq 0$$

$$x_1(0^-) = x_2(0^-)$$

$$x_1(t) \neq x_2(t), t < 0$$



이의 ULT는
 이의 LT중 causal한 $e^{-at}u(t)$ 가 된다.
 여기서 알수 있는 바와 같이 ULT에서는 ROC가 자명하게 얻어진다.

the product of
 the ULTs of the causal
 signals.

circuit theory에서 배웠듯, RLC circuit으로 시스템을 구성하면, L은 미분기
 C는 적분기로 볼 수 있다. time reference 0을 기준으로 이들 LC중 initial
 condition이 zero가 아닌 경우에도, 0+부터 어떤 입력을 가하여 system의
 output이 원하는 값이 되도록 하는 일이 중요하다.

Integration Property for Unilateral Laplace Transform

Recall: $\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \stackrel{x(t<0)=0}{=} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$

and from the previous page:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\{x(t) * u(t)\} = \mathcal{X}(s) \cdot \mathcal{U}\mathcal{L}\{u(t)\}$$

Hence, $\mathcal{U}\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st} dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}\{u(t)\}$

then $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{U}\mathcal{L}} \frac{1}{s} \mathcal{X}(s)$ — same as bilateral LT

integration property
 for ULT

'of causal signal'까지
 한 덩어리로 봐야한다.

주의!!!
 적분구간이 0-에서 무한
 대이다!!!!

causal signal의 0-로부
 터의 integrator output
 의 ULT를 구하기위해서
 는, causal x(t)의 ULT
 과 unit step의 ULT를 곱
 하면 되는데, 둘다 causal
 signal이므로
 각각의 LT를 구해 곱하면
 된다. $u(t)$ 는 신호자체가
 causal이므로 LT와 ULT
 가 같다.

여기서 주의할 것은, $x(t)$ 는 causal일 필요가 없다는 것이다. 물론 $x(t)$ 가 causal이면 당연히 성립한다.
 따라서 expression은 오해의 소지가 크다. 다만, $x(t)$ 의 ULT는 $X(s)$ 다. 라고만 말하면 충분하다. 왜냐하
 면 ULT $X(s)$ 로 부터 noncausal $x(t)$ 를 만들수는 없기 때문이다.
 주의: BLT과 달리 중대한 차이가 있다!!!!

Differentiation Property for Unilateral Laplace Transform

Q. $x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} y(t)$

$$x(t) \longleftrightarrow \mathcal{X}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

Derivation:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{U}\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{dt} e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-s)e^{-st} dt = s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = s\mathcal{X}(s)$$

But we must subtract the initial value $x(0^-)$ because of the unilateral nature of the transform.

both-sided signal $x(t)$ 의
 미분의 unilateral LT를 구
 하자. 언뜻생각하면, 어차
 피 ULT은 t 가 음수부분은
 무시하므로 $x(t)$ 의
 $t < 0$ 에서의 값은 필요 없을
 것 같다.
 하지만, 미분이라는 것이
 그 점에서의 좌우값에 영향
 을 받기 때문에 그 영향이
 나타난다.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Derivation:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

Note:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} \longleftrightarrow s(s\mathcal{X}(s) - x(0^-)) - x'(0^-)$$

$$\longleftrightarrow s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

14

partial differentiation 부분적분을 수행한다. 그대로 미분 미분 미분 미분... 적분 적분 적분... + - + - ...

그 점에서의 좌우값에 영향을 받기 때문에 그 영향이 나타난다.

예를 들어
x_1(t)는 t<0에서 1이고 나머지는 0,
x_2(t)는 언제나 0이다.

둘의 ULT은 0으로 같지만,
미분하면 x_1(t)는 t=0에서 Dirac delta가 나타나고 x_2(t)는 그렇지 않다.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\int fg = \int_{-\infty}^{+\infty} (fg)' - fg'$$

$$= [fg]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} fg'$$

Use ULT's to Solve Differential Equations

with Initial Conditions

Example:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = \beta, y'(0^-) = \gamma, x(t) = \alpha \cdot u(t)$$

Take $\mathcal{L}\{f\}$'s:

$$s^2\mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma + 3[s\mathcal{Y}(s) - \beta] + 2\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\beta(s+3) + \gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

ZIR — Response for zero input $x(t)=0$.

ZSR — Response for zero state, $\beta=\gamma=0$, initial at rest.

좌측의 LCCDE는 모든 t에서 성립하므로 t>0-에서도 성립한다.

따라서 ULT을 해도 성립한다. 따라서 이를 이용하여 y(t)의 t>0-에서의 응답을 구할 수 있다.

x(t)와 y(t)는 모두 causal하다고 가정한다. 여기서 causal이란 t>=0-에서 non-zero를 가질 수 있는 신호.

ULT는 linear operator이고

항등인 두 causal 신호의 ULT는 같으므로...

LCCDE with initial condition에 input을 가했을때의 output은 ZIR와 ZSR의 합으로 나타난다.

어디서 본듯한????

linear ODE의 homogeneous solution과 particular solution!!!!

주의: zero state response는 input에 따라

Example (continued)

- ZSR — Response for LTI system initially at rest ($\beta = \gamma = 0$)

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{X}(s)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

- **ZSR** – Response for LTI system initially at rest ($\beta = \gamma = 0$)

$$\mathcal{X}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- **ZIR** – Response to initial conditions alone ($\alpha = 0$).

For example:

$$x(t) = 0, \quad y(0^-) = \beta = 1, \quad y'(0^-) = \gamma = 0$$

↓

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

16

particular solution!!!!

주의: zero state

response는 input에 따라 다른 값이 된다. 여기서는 $\alpha u(t)$ 를 가했을때의 ZSR를 구했을 뿐이다.

zero input response는 말 그대로 input에 zero를 넣었을때 나오는 response이다. 이 response가 zero이면 LTI가 되지만, zero가 아니면 LTI가 아니다.

causal 신호만 다루므로, right sided exponential로 inverse LT하면 된다.

Fourier transform에서는 $x(0)$ 을 $X(j\omega)$ 로 구하는 법이 있다. (How?)

Unilateral LT에서는 주어진 signal 이 $t=0$ 이후에서 정의될때, $x(0)$ 의 값과 $x(\infty)$ 의 값을 ULT로부터 구할 수가 있다.

More About Unilateral Laplace Transform

- **Initial- and Final-value Theorem**

If $x(t) = 0$ at $t < 0$, then

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$

Proof: From the differentiation property:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s\mathcal{X}(s) - x(0)$$

$$\text{L.H.S.} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \cdot 0 \cdot dt = 0$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} dt = x(\infty) - x(0) \quad \text{for } s \rightarrow 0$$

Then, Eq. (1) $\Rightarrow$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$

17

간단한 example을 생각하자.

$x(t) = 5e^{at}u(t)$ 라고 하면 $x(0)$ 는 5여야 한다. $X(s) = 5/(s-a)$ 이므로 $sX(s)$ 에서 s 를 무한대로 보내면 initial value가 나온다.

앞서 p. 15에서 initial value를 보면 beta가 된다.

간단한 example을 생각하자.

$x(t) = 5u(t)$ 라고 하면 $x(\infty) = 5$ 여야 한다. $X(s) = 5/s$ 이므로 $sX(s)$ 에서 s 를 0으로 보내면 (이미 s 를 무한대로 보내면 0이라고 했으므로 당연히 ...) final value가 나온다.

앞서 p. 16에서 final value를 보면 $\alpha/2$ 가

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{D(s)} = x(0)$$

도 영원이 ... final value가 나온다. 앞서 p. 16에서 final value를 보면 alpha/2가 된다.

Applications of the Initial- and Final-Value Theorem

For $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

n – order of polynomial $N(s)$, d – order of polynomial $D(s)$.

- Initial value:**

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \begin{cases} 0 & d > n + 1 \\ \text{finite} \neq 0 & d = n + 1 \\ \infty & d < n + 1 \end{cases}$$

Eg. $X(s) = \frac{1}{s+1}$ $x(0) = ?$

- Final value (E.g. tracking error)**

If $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} X(s) < \infty$.
 $\Rightarrow$ No poles at $s = 0$.

18

EECE233 Signals and Systems

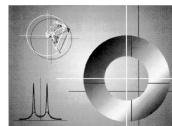
Lecture Note #16

Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O&W pp. 741-763
- The (Bilateral) z -transform and its ROC
- Properties of the ROC
- Inverse z -Transform
- Examples

* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.



CT에서 FT의 확장인 LT를 배웠듯, DT에서 FT의 확장인 ZT를 배운다.

LT와 ZT은 많은 유사점을 가지므로 유사점과 차이점을 표로 만들어 숙지하자.

ZTF is very important for digital filter design, digital control, digital signal processing, digital communications, etc.

The z -Transform

(another transform, any end?)

Motivation: Analogous to LT in CT

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$\Downarrow$

$$x[n] = z^n \longrightarrow y[n] = H(z)z^n$$

Eigenfunction
for DT LTI

(From Lecture #5)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \text{ (assuming it converges)}$$

The (Bilateral) z -Transform

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = Z\{x[n]\} \quad - \quad z\text{-transform}$$

ZTF은 (... , $x[-1]$, $x[0]$, $x[1]$, ...)을 ²
polynomial $\dots + x[-1]z^1 + x[0] + x[1]z^{-1}$ 로 나타낸 것이라 생각하면 간단하다.
물론 이를 z 의 함수로 보면서 ROC를 명시해야하겠다. 그런데 무한 terms면 rational이라 하지 않는다.

LT와의 유사점:

1. ZT은 1-D discrete-parameter signal을 2-D continuous-parameter signal로 transform한 것으로 볼 수 있다.

이 새로운 signal의 domain은 1-D complex plane (z -plane)의 부분 집합이다.

2. 서로 다른 두 신호가 같은 모양의 algebraic mapping rule을 가질 수 있다. (물론 ROC는 다르지만...)

3. LT에서와 마찬가지로 ROC를 명시해야 한다.

The z -Transform — DT Laplace Transform

Recall:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \stackrel{t=n\Delta t}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(n\Delta t) \cdot \Delta t}_{x[n]} \underbrace{(e^{s\Delta t})^{-n}}_z$$

$\Downarrow$ DT, Δt is now finite

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$0^n = 0$ for n nonnegative,
not defined elsewhere.

차이점

1. 가장 두드러진 차이점은 z^{-n} 을 곱하므로 '0으로 나눌수 없다'와 관련된 여러 다른 상황이 생긴다는 것. LT에서는 항상 nonzero값을 곱했다.

2. '0으로 나눌수 없다'가 중요하게 여겨진다.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^n$$

where

$$z = e^{s\Delta t}$$



3

nonzero 값을 곱했다.

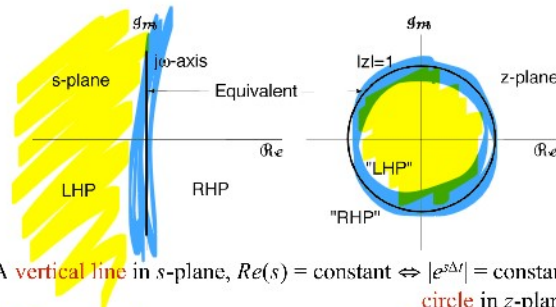
2. '0으로 나눌수 없다'가 중요한데 이를 헛갈리게하는 conventino이 있다.

3. 그외 기타 차이 여럿....

The Relations Between $\mathcal{ZT}$ and $\mathcal{LT}$, s-plane and z-plane

$$e^{s\Delta t} = z$$

$j\omega$ -axis in s-plane ($s = j\omega$) $\Leftrightarrow |z| = |e^{j\omega\Delta t}| = 1$ — a unit circle in z-plane



- A vertical line in s-plane, $Re(s) = \text{constant} \Leftrightarrow |e^{s\Delta t}| = \text{constant}$, a circle in z-plane.
- LHP in s-plane, $Re(s) < 0 \Rightarrow |z| = |e^{s\Delta t}| < 1$, inside the $|z| = 1$ circle, special case, $Re(s) = -\infty \Leftrightarrow |z| = 0$.
- RHP in s-plane, $Re(s) > 0 \Rightarrow |z| = |e^{s\Delta t}| > 1$, outside the $|z| = 1$ circle, special case, $Re(s) = +\infty \Leftrightarrow |z| = \infty$.

4

The ROC and the Relation Between $\mathcal{ZT}$ and $\mathcal{DTFT}$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n} \\ &= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \end{aligned}$$

LT에서와 같이:

이런 의미에서는 FT이
ZT보다 일반적이다. 그러
나...

$$= \mathcal{Z}\{x[n]r^{-n}\}$$

$$ROC \in \left\{ z = re^{j\omega} \text{ at which } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

- depends only on $r = |z|$, just like the **ROC** in s -plane only depends on $\text{Re}(s)$
- **Unit circle ($r = 1$) in the ROC $\Rightarrow$ DTFT $X(e^{j\omega})$ exists**

5

이런 의미에서는 FT이
ZT보다 일반적이다. 그
러나...

Example #1 $x[n] = a^n u[n]$ — **right - sided**

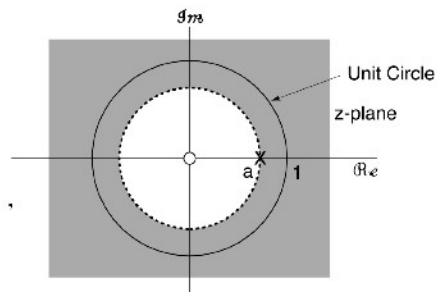
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(az^{-1})^n}_a$$

$$= \frac{1 - (az^{-1})^\infty}{1 - az^{-1}} = ?$$

$$\text{If } |az^{-1}| < 1, \text{ i.e. } |z| > |a|$$

$$\text{Then } X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

That is, ROC $|z| > |a|$,
outside a circle, "RHP"



6

가장 간단한 DT signal로
geometric sequence를
생각해 보자.

$x(t) = e^{at} u(t)$
의 LT에서와는 달리

pole at $z=a$ 와 zero at
 $z=0$ 가 동시에 나타났
다!!!!

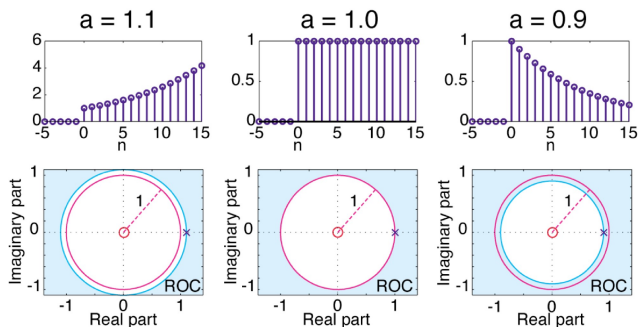
ROC가 0을 포함하지 않으
므로 z 를 분자분모에 곱하
여 오른쪽과 같이 z 의
polynomial로 분자분모나
타내면
pole과 zero의 위치를 쉽게
파악할 수 있다.

Example #1 (cont.)

$$x[n] = a^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ for } |z| > |a|.$$

The signals are all
right-sided and
consequently the ROCs
are all outside the
circles.

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ for } |z| > |a|.$$



ROC outside $|z|=1$
unstable

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

include $|z|=1$
stable

7

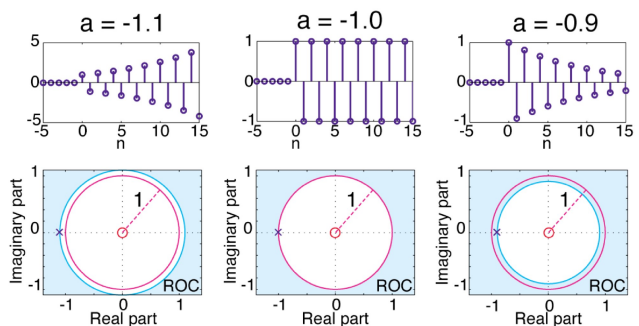
consequently the ROCs are all outside the circles.

The third one is DT Fourier transformable and its ROC contains the unit circle.

DT LTI's BIBO **stability** iff absolutely summable iff Fourier transformable.

Example #1 (cont.) — What if $a < 0$?

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ for } |z| > |a|.$$



ROC outside $|z|=1$
unstable

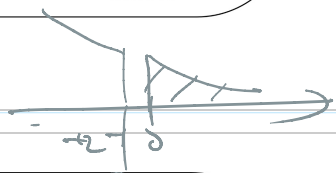
include $|z|=1$
stable

8

The signals are all right-sided and consequently the ROCs are all outside the circles.

The third one is DT Fourier transformable and its ROC contains the unit circle.

$a^n u[n]$



$$a^n u[n] \quad \xrightarrow{\text{LT}} \quad \frac{1}{1-az^{-1}}$$

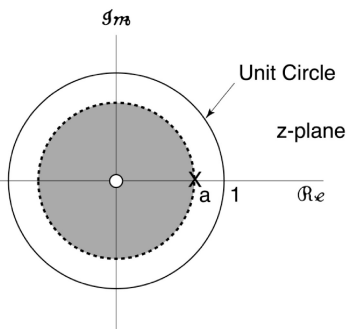
Example #2: $x[n] = -a^n u[-n-1]$ — left - sided

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &\stackrel{n \rightarrow -n}{=} - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \\ &= 1 - \frac{1 - (a^{-1} z)^{\infty}}{1 - a^{-1} z} = ? \end{aligned}$$

If $|a^{-1} z| < 1$, i.e. $|z| < |a|$

$$\begin{aligned} \text{Then } X(z) &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{a^{-1} z}{a^{-1} z - 1} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Same $X(z)$ as in Ex #1, but different ROC.



LT에서와 마찬가지로 ZT에서도 서로 다른 두 신호가 같은 algebraic form의 ZT를 가질 수 있다. 물론 ROC는 다르지만...

원점이 ROC에 포함되므로 가운데도 칠해야 한다.

위식과 이 식의 등식은 ROC 내에서 성립한다.

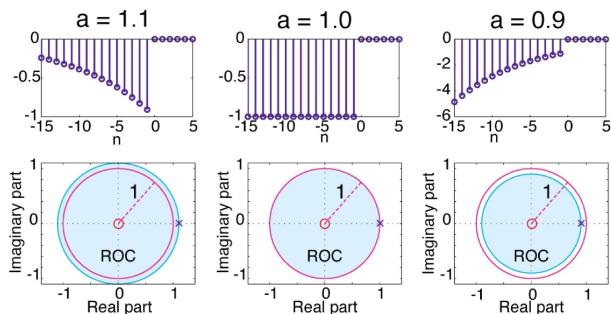
9

이 등식은 ROC내에서 성립하지 않는다. 0에서 성립하지 않기 때문이다. 하지만 편의상 $x[n]$ 의 ZT이 $1/(1-az^{-1})$ 이고 ROC가 $|z| < |a|$ 라고 말한다. 조금 문제가 있는 표현인데 ZT과 관련 하여서는 이런 식으로 표현하는 것이 convention이다. 다행인것은 pole과 zero를 찾기위해 $N(z)/D(z)$ 로 바꾸어보면 $z=0$ 은 zero이지 pole이 아니다. 따라서 여전히, "pole zero의 위치를 찾기 위해서는 $N(z)/D(z)$ 로 바꾸어 찾으려 한다"는 말이 옳다. 다만 pole 과 zero at infinity는 따로 주의해야 한다.

이런 표현이 convention임을 명심하지 앞으로 ZT을 공부할 때 괴로울 것이다.

Example #2 (cont.)

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ for } |z| < |a|.$$



ROC include $|z|=1$
stable

inside $|z|=1$
unstable

Observation: ROC includes $|z|=1 \Rightarrow$ stable.

The signals are all left-sided and consequently the ROCs are all inside the circles.

The first one is DT Fourier transformable and its ROC contains the unit circle.

ROC include $|z|=1$

stable

Observation: ROC includes $|z|=1 \Rightarrow$ *stable*.

inside $|z|=1$

unstable

and its ROC contains the unit circle.

10

Rational z -Transform

$x[n]$ = linear combination of exponentials for $n > 0$ and for $n < 0$



$X(z)$ is rational

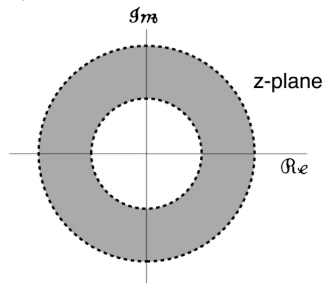
$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Polynomials in } z \end{array} \right.$$

— characterized (except for a prefactor) by its **poles and zeros**

11

Properties of the ROC

- 1) The ROC of $X(z)$ consists of a ring in the z -plane centered about the origin (**equivalent to a vertical strip in the s -plane**)



- 2) The ROC does *not* contain any poles (same as in $\mathcal{L}\mathcal{T}$).

pole zero의 위치를 알고 싶으면, 일단 기본적으로는 LT에서와 마찬가지로 정의하므로 반드시 분자 분모가 모두 z (not z^{-1})의 polynomial이 되게 한후, 즉 분모 분자에 z^M, z^N 을 곱한 후 인수분해한다.

만약 분모의 차수가 크면 " $|z| \rightarrow \infty$ 에서 그 차수차만큼의 zero를 갖는다"라고 말하고

만약 분자의 차수가 크면 " $|z| \rightarrow \infty$ 에서 그 차수차만큼의 pole을 갖는다"라고 말한다. 이경우 $|z| \rightarrow \infty$ 는 ROC에 포함될 수가 없다.

이렇게 $|z| \rightarrow \infty$ 에서의 pole과 zero를 정의하면, z^{-1} 에 대해 rational인 ZT는 항상 같은 갯수의 pole과 zero를 갖는다 !!!!!!!!!!!!!

2) The ROC does *not* contain any poles (same as in $\mathcal{LT}$).

12

a_n 이 complex number일때, $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n$ 은 any rearrangement가 수렴할때, 즉 $\sum |a_n|$ 이 수렴할때 수렴하는 것으로 정의되므로, (absolute summability = sum exists for any rearrangement) 어느 한 점 $z=c$ 가 ROC에 포함되면, $|z|=|c|$ 도 ROC에 포함된다.

$z=re^{j\theta}$ 로 생각해 보라.

z^{-1} 에 대해 rational인 ZT는 항상 같은 갯수의 pole과 zero를 갖는다!!!!!!!!!!!!!!

사실 LT에서도 pole and zero at infinity를 이상과 같이 정의할 수 있다.