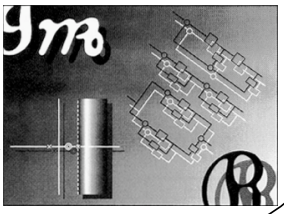
EECE233 Signals and Systems

Lecture Note #13

Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O & W pp. 654-670
- Motivation and Definition of the (Bilateral) Laplace Transform
- Examples of Laplace Transforms and Their Regions of Convergence (ROC's)
- Properties of ROC's



* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.

지금까지 우리는 time domain상에서의 design과 analysis, 그리고 frequency domain 상에서의 design과 analysis에 대해 배웠다.

그러나, 원하는 시스템을 제대로 디자인 하기 위해서는 아직 부족함을 느낀다.

지금부터는 LCCDE로 CT LTI 시스템을 디자인하는데 필요한 좀 더 강력한 transform을 배운다.

이 LN13에서는 signal에 대해 주로 다루고 다음 LN14의 9페이지부터는 system에 대해 다룬다.

Laplace transform(LT)이 유용한 이유는 Fourier transform처럼 convolution property가 있기 때문이다. Y(s) = H(s)X(s)
그러나, 일반적인 신호의 inverse transform은 쉽게 구하지 못한다.
다행히
rational function of s로 LT이 나오는 경우는 쉽게 inverse를 구할 수 있는데 마침 LCCDE로 I/O관계가 나타나는 시스템은 s의 rational function으로 impulse response의 LT이 나타난다.

Motivation for the Laplace Transform

- CT Fourier transform enables us to do a lot of things, *e.g.*
  - — Solving LCCDE's
  - — Analyzing frequency response of LTI systems
  - — Sampling
  - — Modulation
  - ⋮
- Why do we need yet another transform?
- Fourier transform *cannot* handle *unstable* signals/systems. *i.e.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt = \infty$$

Because the eigenfunction $e^{j\omega t}$ in Fourier transform has unit amplitude $|e^{j\omega t}| = 1$. For example:

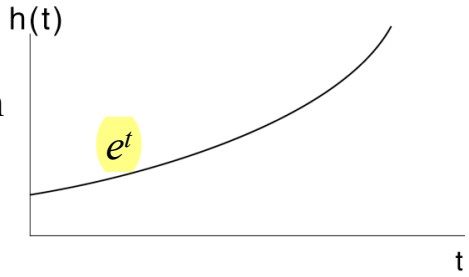
Some real-world systems are better modeled by unsatable systems.
We may want to design a proper electrical system that will stablize the overall system when connected to the unstable system.

Motivation for the Laplace Transform (continued)

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

And $h(t) = e^{t} \cdot u(t)$
— an unstable causal system

$H(j\omega) = ?$



Consequently, we cannot analyze this system using the easy method of

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega).$$

Do we have to go back to $y(t) = h(t) * x(t)$?

3

Remind that a CT LTI system is BIBO stable iff h(t) is absolutely integrable.

예를 들어 right or left-sided exponential function e^{-at}u(t) 또는 e^{at}u(-t)의 경우 a가 음수이면 Fourier transform은 존재하지 않는다.

Laplace transform이 중요한 이유는,
Fourier transform으로 다룰 수 없는 신호도 다룰 수 있다는 것과

Fourier transform이 존재하는 신호의 경우,
Laplace transform에서 Fourier transform을 구할 수 있다는 점이다.

따라서 Fourier transform이 존재하는 신호만 놓고 보더라도 Laplace transform은 보다 높은 차원에서 신호를 이해 할 수 있게 해 준다.

2차원적인 지구표면에 붙어서 태양계를 논하는 것이 Fourier transform이라면
3차원 우주공간에서 태양계를 논하는 것이 Laplace transform이라 비유할 수 있겠다.

Motivation for the Laplace Transform (continued)

- In many applications, we do need to deal with *unstable* systems, *e.g.*
  - — Stabilizing an inverted pendulum
  - — Stabilizing an airplane or space shuttle

    ⋮
  - — Instability is *desired* in some applications, *e.g.* oscillators and lasers

- How do we analyze unstable signals/systems?
  Recall from LN #5, eigenfunction property of LTI systems:

$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(s)e^{st}$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad \text{(assuming this converges)}$$

— e^{st} is an eigenfunction of *any* LTI systems,
— $s = \sigma + j\omega$ can be complex in general

4

즉, 주어진 physical system이 CT LTI system으로 modeling이 되는 BIBO unstable system인데

여기서 보조 시스템을 달아서 overall stable한 CT LTI system을 만들고 싶은 경우가 많다.

이를 위해서는 먼저, time-domain외에서도 unstable CT LTI system을 다룰 수 있는 tool이 있으면 좋겠고
물론 이 새로운 tool은 BIBO stable한 CT LTI도 함께 다룰 수 있으면 좋겠다.

The (Bilateral) Laplace Transform

(Can be viewed as an extension of the Fourier Transform)

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$s = \sigma + j\omega$ is a *complex* variable — Now we explore the full range of s

First comments:

(1) $$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

(2) A critical issue in dealing with Laplace transform is convergence:
— $X(s)$ generally exists only for *some* values of s,
located in what is called the *region of convergence* (ROC)

$$\text{ROC} \in \{s = \sigma + j\omega \text{ so that} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|x(t)e^{-\sigma t}|}_{\substack{\text{Depends} \\ \text{only on } \sigma \\ \text{not on } \omega}} dt < \infty\}$$

(3) If $s = j\omega$ is in the ROC (*i.e.* $\sigma = 0$), then

$$\mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\omega} = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

5

반면, 적분 구간이 non-negative t만인 Laplace transform은 unilateral LT라 부른다.

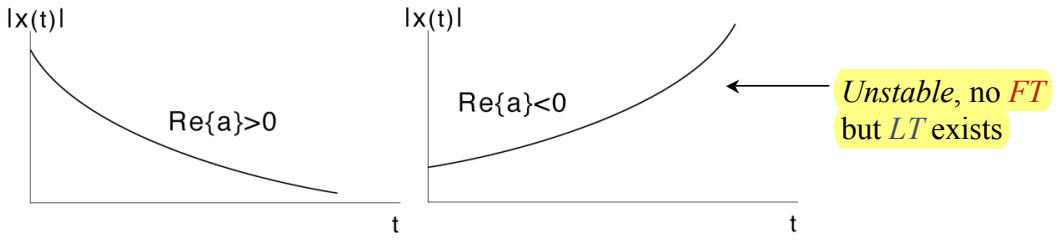
Fourier transform과 마찬가지로 Laplace transform도 t의 함수를 다른 변수의 함수로 바꾸는 것이다. 즉, 함수를 함수로 바꾸는 변환이다.

그런데, 이 새로운 함수의 정의역이 있을 것이다. 이것이 ROC이다.

Q. Laplace transform이 general한가 Fourier transform이 general한가?
A. (1)에 따르면, Laplace transform of x(t)는 x(t) times e^-\sigma t의 Fourier transform으로 볼 수 있다. 이런 점에서는 Fourier transform이 Laplace transform보다 일반적이다.
그러나, 많은 경우... 그 반대로 이야기 한다. (3)을 보라.. 즉, X(s)를 x(t)의 Laplace transform으로 정의하고 s=j\omega에서 이를 evaluate한 것을 Fourier transform으로 볼 수 있다. 그런 점에서 Laplace transform이 Fourier transform보다 일반적이다.

Example #1:

$x_1(t) = e^{-at}u(t)$ (a — an arbitrary real or complex number)



$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s+a}[\underbrace{e^{-(s+a)\infty}}_{?} - 1]$$

This converges only if $Re(s+a) > 0$, i. e. $Re(s) > -Re(a)$

$$\Downarrow$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \underbrace{\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)}_{\text{ROC}}$$

6

LT는 s의 함수가 되는데, 어떤 s값에서는 적분이 수렴하고 즉 LT가 정의되고 어떤 s값에서는 적분이 정의되지 않거나 발산하여 LT가 정의되지 않을 수 있다.

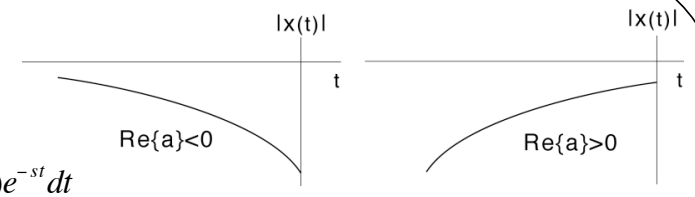
ROC가 중요한 이유는, 서로다른 두 CT signal x1(t)와 x2(t)가 서로다른 ROC를 가지면서도 같은 모양의 s의 함수 X1(s), X2(s)를 가질 수 있기 때문이다.

함수 X(s)가 정의되는 domain을 specify하는 것은 대단히 중요한다.

See Example#1 and Example#2

Example #2:

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$$



$$X_2(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}[1 - \underbrace{e^{(s+a)\infty}}_{?}]$$

This converges only if $Re(s+a) < 0$, i. e. $Re(s) < -Re(a)$

$$\Downarrow$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \underbrace{\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)}_{\mathrm{ROC}}$$

Same as $X_1(s)$, but a different **ROC**

Key Point (and a key difference with *FT*): Need *both* $X(s)$ *and* ROC to uniquely determine $x(t)$. No such an issue of **ROC** for *FT*.

예를 들어
f(x) =
x, for x>0
not defined, elsewhere
와
g(x) =
x, for x<0
not defined elsewhere
는 명백히 다른 함수이다.

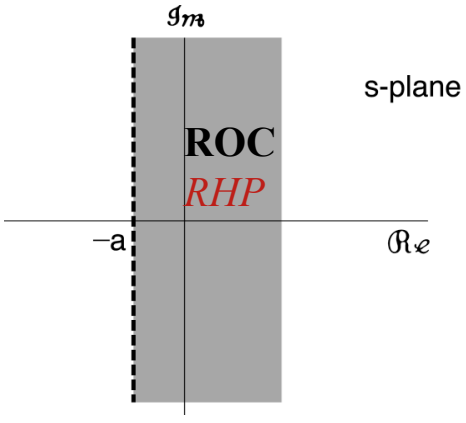
마찬가리조
X1(s) =
1/(s+a), for Re(s+a)>0
not defined elsewhere
와
X2(s) =
1/(s+a), for Re(s+a)<0
not defined elsewhere
는 s의 함수로서 정의역이 다른, 다른 함수들 이다.

Graphical Visualization of the ROC

Example #1

$x_1(t) = e^{-at}u(t)$ — right-sided signal,

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$$

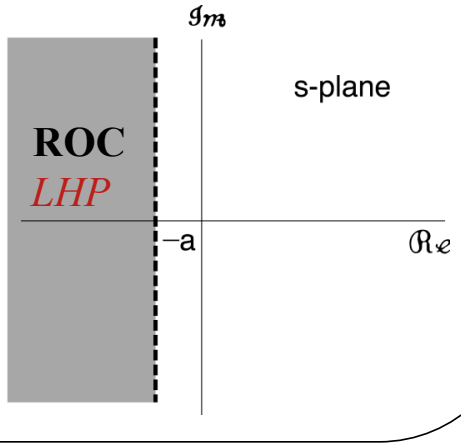


암기: right−sided exponential has right −sided ROC

Example #2

$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ — left-sided signal

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$$



암기: left−sided exponential has left−sided ROC

Rational Transforms

- Many (but by no means all) Laplace transforms of interest to us are rational functions of s (*e.g.* Examples #1 & #2, in general, LTIs described by LCCDEs), i. e.

$$X(s) = \frac{\mathrm{N}(s)}{\mathrm{D}(s)} \quad , \quad \mathrm{N}(s), \mathrm{D}(s) \text{ — polynomials in } s$$

- Roots of $\mathrm{N}(s)$ = *zeros* of $X(s)$
- Roots of $\mathrm{D}(s)$ = *poles* of $X(s)$
- Any $x(t)$ consisting of a linear combination of complex exponentials for $t > 0$ and for $t < 0$ (i. e. as in Example #1 and #2) has a rational Laplace transform.

사실, LTI를 LCCDE로 나타내어 RLC등을 써서 디자인 하기 위해 Laplace transform을 배운다.

앞서 LCCDE의 Fourier transform으로부터 j\omega의 rational function으로써의 transfer function을 구해보았다. 간단히 생각하면 j\omega 대신에 s로 쓴 것으로 볼 수 있다.

9

Example #3

$$x(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = \int_0^\infty \left[3e^{2t} - 2e^{-t}\right]e^{-st}dt$$

$$= 3\underbrace{\int_0^\infty e^{-(s-2)t}dt}_{\text{Requires Re}(s)>2} - 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-(s+1)t}dt}_{\text{Requires Re}(s)>-1}$$

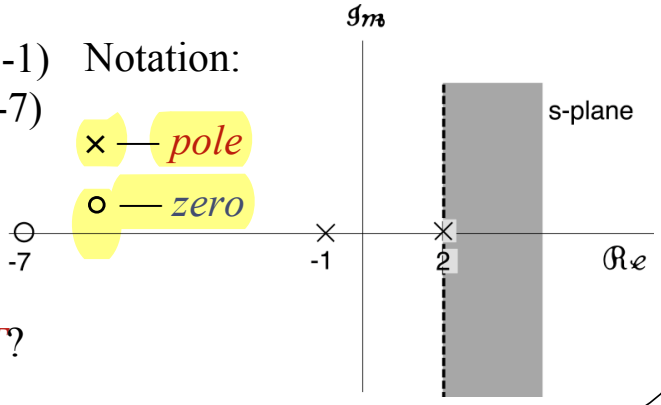
$$= \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s+7}{(s-2)(s+1)} \qquad \mathrm{Re}(s) > 2$$

$\Rightarrow$ two poles (p_1=2, p_2= -1) & one zero (z_1 = -7)

Notation:

× — *pole*

o — *zero*



Q: Does $x(t)$ have *FT*?

X(s)의 마지막 꼴에서 또는 pole-zero plot에서 쉽게 알 수 있는 것은,

right-sided인지 left-sided인지 모르겠으나 e^(2t) 그리고 e^(-t) 성분이 있다는 것이다.

"s의 pole times t가 exponent가 된다."

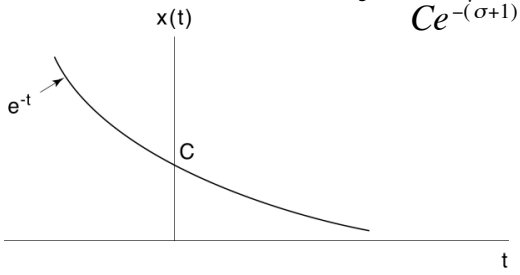
10

"FT가 존재한다" = "\omega의 함수로서의 FT가 모든 \omega에 대해 존재한다"
이므로 이 질문은
다른 말로, ROC 가 \sigma = j\omega 축을 포함하느냐 하지 않느냐라는 말이다.

Laplace Transforms and ROC's

- First of all, some signals do not have Laplace transforms

(a) $x(t) = Ce^{-t}$ for all t since $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)e^{-\sigma t}|}_{Ce^{-(\sigma+1)t}} dt = \infty$ for all σ



(b) $x(t) = e^{j\omega_o t}$ for all t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t}\, dt = \infty \quad \text{for all } \sigma$$

$X(s)$ is defined only in ROC, by definition,
$X(s) \neq \infty \Rightarrow$ No $\delta(s)$ is allowed, different from **FT**

정확히 말해,
"많은 신호들의 Laplace transform의 ROC가 공집합이 아니지만, 어떤 신호들은 ROC가 공집합이다."

Laplace transform은 CT signal중 right 또는 left -sided exponential function을 다루기 편하고 CT system중 LCCDE로 나타난 system을 다루기 편하다.

key restriction in FT를 LT에서는 X(s)로 generalized function을 허용하지 않는다!!!!

통신에서는 complex sinusoidal signals가 중요하다. FT이 보다 더 자주 쓰인다.

Properties of the ROC

Secondly, the ROC can take on only a small number of different forms

1) The ROC consists of a collection of lines parallel to the $j\omega$-axis in the s-plane (i.e. the ROC only depends on σ).
Why?

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|\, dt < \infty \text{ depends only on } \sigma = \mathrm{Re}(s)$$

2) If $X(s)$ is rational, then the ROC does not contain any poles.
Why?

Poles are places where $D(s) = 0$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \infty \quad \text{Not convergent.}$$

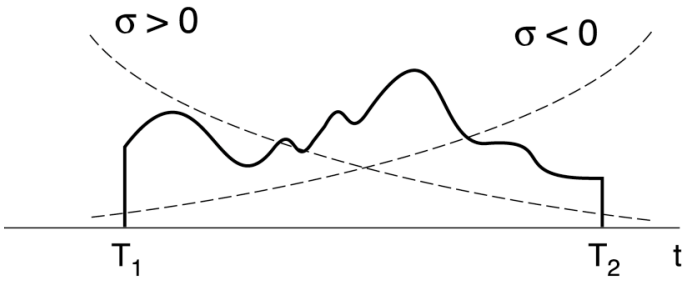
A. Lebesgue integral에서

improper integral
\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt는

\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^+dt
와
\int_{-\infty}^{\infty}[-x(t)]^+dt
가 각각 수렴할 때,
\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^+dt
-
\int_{-\infty}^{\infty}[-x(t)]^+dt
로 정의된다. 즉,
x(t)가 absolutely integrable할때 정의된다.

More Properties

3) If $x(t)$ is of finite duration and is absolutely integrable, then the ROC is the entire s-plane.

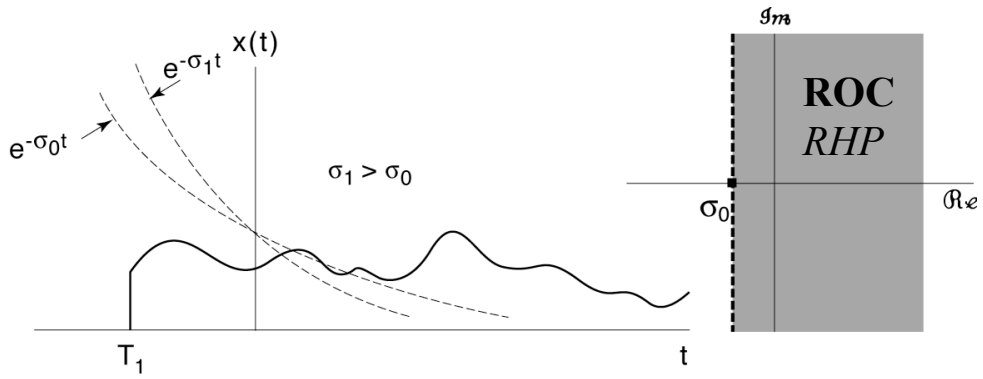


$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-st}dt}_{\text{A finite integration}}$$

$$< \infty \quad \text{if} \quad \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\,dt < \infty$$

ROC Properties that Depend on which Side you are On

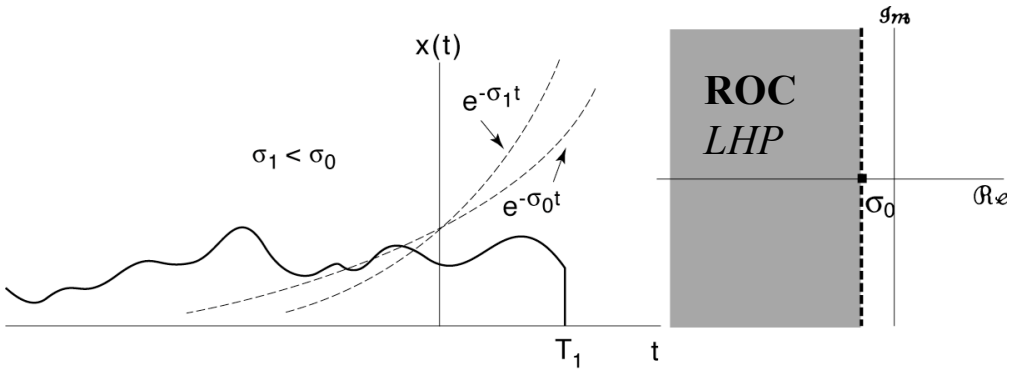
4) If $x(t)$ is right-sided (i.e. if it is zero *before* some time), and if $Re(s) = \sigma_o$ is in the ROC, then all values of s on the right side of the vertical line $Re(s) = \sigma_o$ are also in the ROC.



더 빨리 감쇄시키므로
적분이 존재할 수 밖에 없다.
comparison test!의 적용.

ROC Properties that Depend on which Side you are On

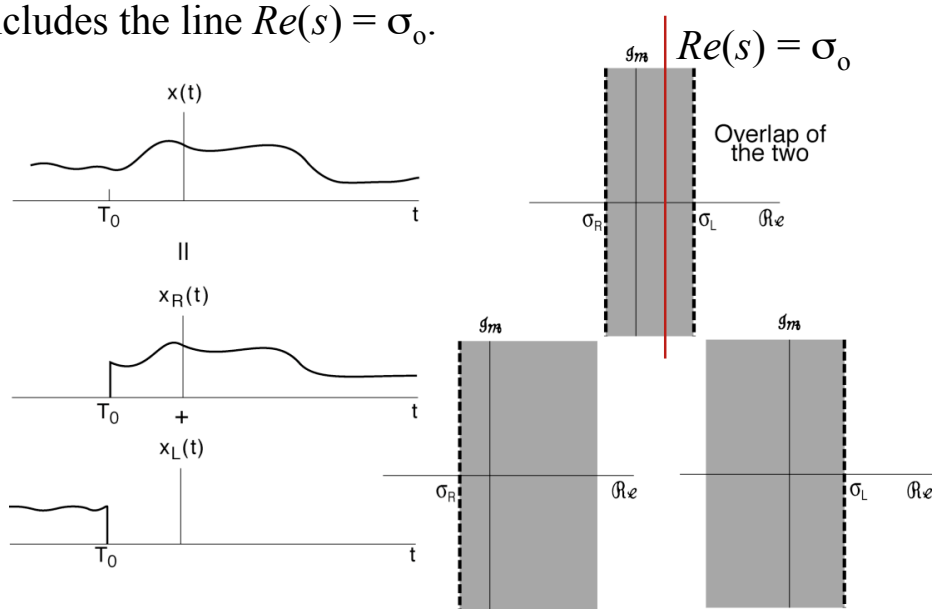
5) If $x(t)$ is left-sided (i.e. if it is zero *after* some time), and if $Re(s) = \sigma_o$ is in the ROC, then all values of s on the left side of the vertical line $Re(s) = \sigma_o$ are also in the ROC.



앞서와 마찬가지로 더 빨리 감쇄시키므로 적분이 존재할 수밖에 없다.
comparison test!의 적용.

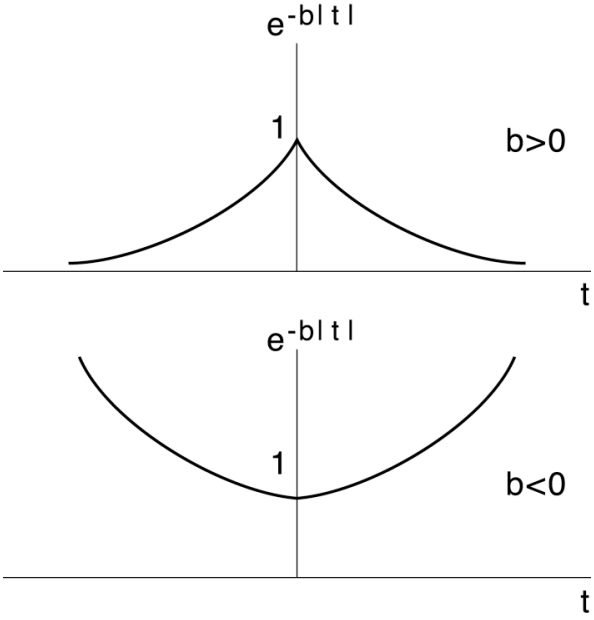
Still More ROC Properties

6) If $x(t)$ is two-sided and if the line $Re(s) = \sigma_o$ is in the ROC, then the ROC consists of a strip in the s-plane that includes the line $Re(s) = \sigma_o$.



Example:

$$x(t) = e^{-b|t|}$$



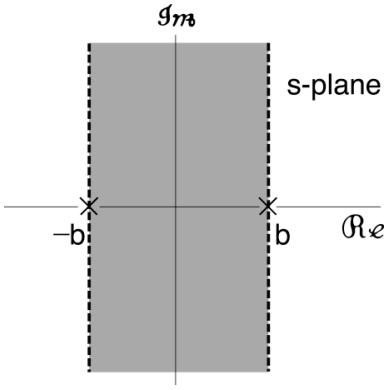
Example (continued):

$$x(t) = e^{bt}u(-t) + e^{-bt}u(t)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$-\frac{1}{s-b}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} < b \qquad \frac{1}{s+b}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -b$$

Overlap only if $b > 0$ $\Rightarrow X(s) = \frac{-2b}{s^2 - b^2}$, with ROC

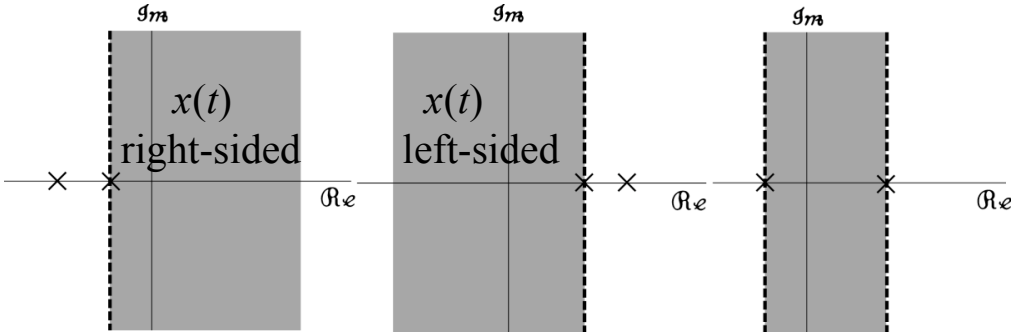


What if $b < 0$? $\Rightarrow$ No overlap $\Rightarrow$ No Laplace Transform

Properties, Properties

7) If $X(s)$ is rational, then its ROC is bounded by poles or extends to infinity. In addition, no poles of $X(s)$ are contained in the ROC.

8) Suppose $X(s)$ is rational, then
   (a) If $x(t)$ is right-sided, the ROC is to the right of the rightmost pole.
   (b) If $x(t)$ is left-sided, the ROC is to the left of the leftmost pole.



(a) (b) (c)

X(s)가 rational이면 PFE으로 X(s)를 1/(s-a_i)들의 linear combination으로 나타낼 수 있다. (중근일때는?? 분모가 더 높은 차수일때는?)
즉,
X(s)가 rational일 때는 PFE으로 모든 property를 쉽게 설명할 수 있다.
분자의 차수가 크면 일단 분모로 나눠서 차수를 낮춘후에 PFE하면 된다. 이때 1, s, s^2, .. 등은 각각 u_0(t)=delta(t), u_1(t) unit doublet, ... 등으로 바꾸면 된다.

s가 unit doublet 임은 inverse LT식에서 쉽게 알수가 있다.

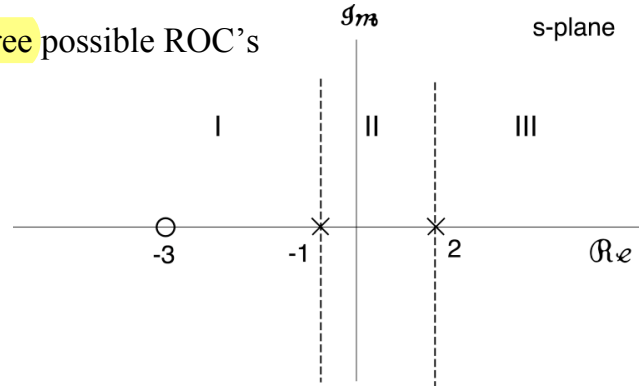
ROC 확인도 쉽다.(?!)

9) If ROC of $X(s)$ includes the $j\omega$-axis, then *FT* of $x(t)$ exists.

Example: $X(s) = \dfrac{(s+3)}{(s+1)(s-2)}$

분모의 차수가 높고, 중근이 없다. -> 따라서 PFE으로 나타낼 수 있다.

Two poles ⇒ three possible ROC's



$x(t)$ is right-sided ⇒ ROC: III
$x(t)$ is left-sided ⇒ ROC: I
$x(t)$ has a Fourier transform ⇒ ROC: II

사실은 ROC가 공집합인 것까지 포함하여 four possible ROCs 이지만 정의역이 공집합인 함수식이 의미가 있을까?