

EECE233 Signals and Systems

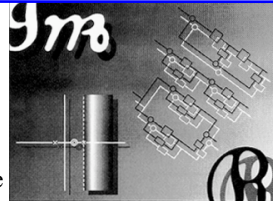
Lecture Note #14

Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O&W pp. 670-698
- Inverse Laplace Transforms
- Examples
- Laplace Transform Properties
- The System Function of an LTI System
- Geometric Evaluation of Laplace Transform and Frequency Response

* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.



여기까지는 signal의 Laplace transform

여기부터는 LTI system 과 Laplace transform

1

우리가 s-domain에서 analysis 와 design을 한 후 다시 time-domain으로 넘어 오기 위해서는 inverse transform이 필요하다.

page 2에서 보는 바와 같이 inverse Laplace transform을 이해하기 위해서는 complex variables, functions 등에 대한 지식이 필요한데

다행히도 이 과목에서는 inverse transform이 쉽게 구해지는 것들 만을 다룬다.

Inverse Laplace Transform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega \in ROC$$
$$= \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Fix $\sigma \in ROC$ and apply the inverse Fourier transform

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \text{FT Synthesis Eq.}$$

$\Downarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

But $s = \sigma + j\omega$ (σ fixed) $\Rightarrow ds = j d\omega$

$\Downarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s)e^{st} ds$$

Will not use in EECE233

우리는 Fourier transform과 inverse Fourier transform에 대해 알고 있고 또한 Laplace transform은 $x(t)e^{-\sigma t}$ 의 Fourier transform이라는 것도 알고 있다. 따라서

contour integral이다. $-\infty$;마지막 등호 이전까지는 이해할 수 있어야 한다.

2

그러나 이 식으로부터 쉽게, 미분기의 system function이 s로 나타나고 즉 unit doublet의 LT이 s이고 2계미분기의 system function은 s^2 이고... 등등을 알 수 있다.

How Do We Perform Inverse Laplace Transform?

- In EECE233, we will only deal with Laplace transform that are:

1) **Rational**, i.e. $X(s) = N(s)/D(s)$;

And/or:

2) **exponential**, i.e. $X(s) = e^{sT}$.

- For case 2), use shift property

$$x(t - T) \longleftrightarrow e^{-sT} X(s) \quad (\text{Similar to the } FT \text{ property})$$

$$x(t - T) \longleftrightarrow e^{-j\omega T} X(j\omega)$$

- For case 1), use **PFE**.

- For case 1) & 2), i.e. $X(s) = e^{-sT} \underbrace{(N(s) / D(s))}_{X_1(s) \leftrightarrow x_1(t)}$

Then



$$x(t) = x_1(t) \Big|_{t \rightarrow t-T} = x_1(t - T)$$

delay를 다루기 위해서...

3

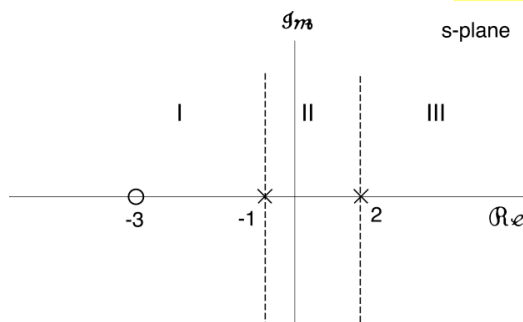
Inverse Laplace Transforms Via Partial Fraction Expansion and Properties

Example:

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{5}{3}$$

Three possible ROC's — corresponding to **three** different signals



Recall

$$\frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s) < -a \longleftrightarrow -e^{-at}u(-t) \quad \text{left-sided}$$

and $\frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s) > -a \longleftrightarrow e^{-at}u(t) \quad \text{right-sided}$

어떤 이들은 4개의 가능한 신호가 있다고도 한다. 어느 경우든, t=0에서 discontinuity가 생긴다.

delay가 없는 rational의 경우 분자를 분모로 나눠 상수 및 s의 polynomial, 그리고 분자의 차수가 분모의 차수보다 낮은 rational function으로 나타내면, 유리함수 부분을 PFE하여 얻은 각 term은 언제나 causal 아니면 anti-causal signal로 inverse LT된다.

4

Example (cont.)

ROC I: — Left-sided signal.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -Ae^{-t}u(-t) - Be^{2t}u(-t) \\
 &= \left[\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{2t} \right] u(-t) \quad \text{Diverges as } t \rightarrow -\infty
 \end{aligned}$$

ROC II: — Two-sided signal, has Fourier Transform.

$$x(t) = -\left[\frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{5}{3}e^{2t}u(-t) \right] \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \pm \infty$$

ROC III: — Right-sided signal.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Ae^{-t}u(t) + Be^{2t}u(t) \\
 &= \left[-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2t} \right] u(t) \quad \text{Diverges as } t \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

5

여기서 보는 바와 같이 ROC에 따라 3가지 (크게는 4가지) 다른 신호로 inverse transform된다.

암기 tip:

1/(s-pole)은
"e to the pole t u t"
또는
"-e to the pole t u -t"로
inverse LT된다.

Properties of Laplace Transforms

- Many parallel properties of the CTFT, but for Laplace transforms we need to determine implications for the ROC

- For example:

Linearity $ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$

ROC at least the intersection of ROC's of $X_1(s)$ and $X_2(s)$

ROC can be bigger (due to pole-zero cancellation)

E.g. $x_1(t) = x_2(t)$ and $a = -b$
 Then $a x_1(t) + b x_2(t) = 0 \rightarrow X(s) = 0$
 $\Rightarrow$ ROC entire s-plane

6

Time Shift

$$x(t - T) \longleftrightarrow e^{-sT} X(s), \text{ same ROC as } X(s)$$

E.g.,

$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \operatorname{Re}(s) > -2 \longleftrightarrow ?$$

$$\frac{e^{-sT}}{s+2}, \operatorname{Re}(s) > -2 \longleftrightarrow e^{-2t} u(t) \Big|_{t \rightarrow t-T}$$

$$\downarrow T = -3$$

$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \operatorname{Re}(s) > -2 \longleftrightarrow e^{-2(t+3)} u(t+3)$$

앞서 페이지 2에서 설명했듯, contour integral로 된 inverse LT식은

time-domain differentiation property를 설명하는 데 유용하다.

미분의 FT이 $j\omega$ $X(j\omega)$ 가 되는 것과 같다.

Q1. 적분기의 FT은? LT은?

Q2. the identity system의 LT은?

s-domain diff property는 pole이 증근일때 어떻게 inverse Laplace transform을 할 것인가? 에 대한 답을 준다.

7

Time-Domain Differentiation

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s) e^{st} ds$$

$\Downarrow$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s), \text{ with ROC containing the ROC of } X(s)$$

ROC could be bigger than the ROC of $X(s)$, if there is pole-zero cancellation. E.g.

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0 \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \delta(t) \longleftrightarrow 1 = s \cdot \frac{1}{s} \quad \text{ROC} = \text{entire } s\text{-plane} \end{aligned}$$

s-Domain Differentiation

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}, \text{ with same ROC as } X(s) \quad (\text{Derivation is}$$

similar to $\frac{d}{dt} \leftrightarrow s$)

$$\text{E.g. } te^{-at} u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \operatorname{Re}(s) > -a$$

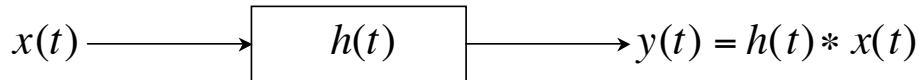
8

A1. 주의! $u(t)$ 의 LT은 $1/s$ 이고 ROC는 RHP이다. 그러나 $u(t)$ 의 FT은 $1/(j\omega)$ 가 아니고 $1/(j\omega + \pi \delta(\omega))$ 이다. 이는 $0.5 \operatorname{sgn}(t)$ 의 FT이 $1/(j\omega)$ 이기때문에

$u(t)$ 는 $1/(j\omega) + \pi \delta(\omega)$ 가 되기 때문이다.

주의 2! RLC circuit의 phasor analysis에서는 언제나 적분기를 $1/(j\omega)$ 로 바꾸었는데, 그 이유는 이때는 입력이 $e^{j\omega t}$ 인 것만 고려하였고 특히 ω 가 0가 아닌 교류회로의 해석만을 생각했기 때문이었다.

Convolution Property



For $x(t) \longleftrightarrow X(s)$, $y(t) \longleftrightarrow Y(s)$, $h(t) \longleftrightarrow H(s)$

Then $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

- This is the main reason why Laplace transform is useful in solving problems involving LTI systems, just like the Fourier transform. **However**, because Laplace transform and its inverse transform are not *symmetric*, **the reverse relation**

$$x(t) \cdot h(t) \longleftrightarrow \times \longleftrightarrow X(s) * H(s)$$

is **not** true, different from Fourier transform. Thus, $\mathcal{L}$ -transform is **not** useful in modulation and sampling.

따라서 LT는 communication and signal processing에서 보 다 control에서 많이 이용된 다. 설령 comm. and signal processing에서 사용될 때 에도 FT도 가능한 경우에 주로 사용된다.

9

Convolution Property (cont.)

ROC of $Y(s) = H(s)X(s)$, **at least** the overlap of the ROC's of $H(s)$ & $X(s)$

- ROC **could be** empty **if** there is no overlap between the two ROCs

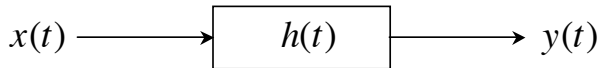
E.g. $x(t) = e^t u(t)$ $\text{Re}(s) > 1$ and $h(t) = -e^{-t} u(-t)$ $\text{Re}(s) < -1$

- ROC could be larger than the overlap of the two.

E.g. $x(t) * h(t) = \delta(t) \Rightarrow$ ROC entire s -plane.

결론은, ROC는 그때그때 달라요...-_-;

The System Function of an LTI System



$$h(t) \longleftrightarrow H(s) \text{ — the system function}$$

The system function characterizes the system



System dynamics correspond to properties of $H(s)$ and its ROC

A first example:

$$\text{System is stable} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \Leftrightarrow \text{ROC of } H(s)$$

includes the $j\omega$ axis

⇒ The frequency response $H(j\omega)$, which is the Fourier transform of $h(t)$, is well defined.

ROC도 물론 specify되었을 때

일반적으로 LCCDE로 나타난 CT LTI system은 **causal**한 것으로 본다. (보통 initial rest조건을 줌으로써 해결한다.)

특별히 causal하지 않은 경우는 specify한다.

Fourier Plancherel이 아닌 Fourier transform이 존재할 필요충분조건이 **absolute integrability**이다. (주의: inverse transform의 존재여부와는 상관없다.)

11

LCCDE로 input-output relation이 주어진 CT LTI system이 있을때 이를 미분기 적분기 adder amp등으로 구현할 때 무작정 구현할 때는 component수가 많더라도 FT나 LT로 rational function으로 나타낸 후, 분자분모의 같은 factor를 나눠버리면 차수가 낮은 equivalent LCCDE를 얻을 수도 있고 이의 block digram을 그려서 구현하면 component수가 줄어든다!!! 자세한 것은 Lecture note #15의 page 9이후에...

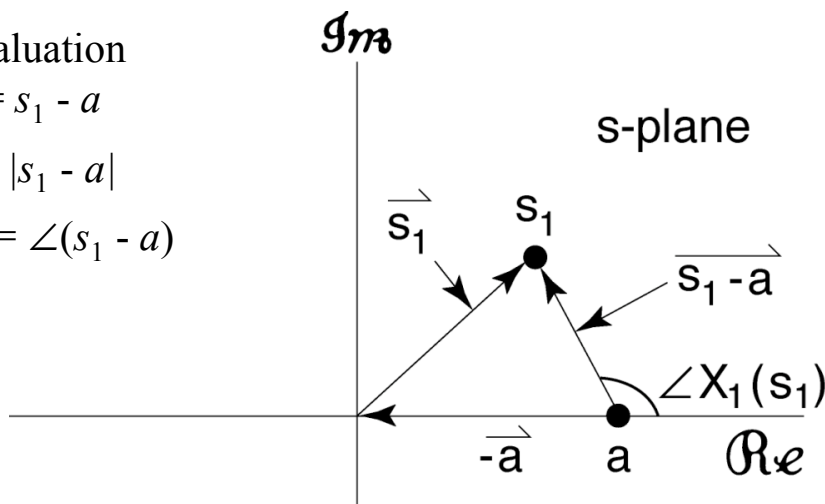
Geometric Evaluation of Rational Laplace Transforms

Example #1: $X_1(s) = s - a$ A **first-order zero**

Graphic evaluation of $X_1(s_1) = s_1 - a$

$$\Rightarrow |X_1(s_1)| = |s_1 - a|$$

$$\& \angle X_1(s_1) = \angle(s_1 - a)$$



이제 Laplace transform이 Fourier transform보다 높은 차원에서 신호및시스템을 이해하게 해 줌을 확인해보자.

first order zero 즉 a 가 분자의 중근이 아니라는 말.

Q. 이 그림으로부터 $X(j\omega)$ 가 어떤 모양을 가질지 geometrical하게 생각하여 예측해 보자.

12

Example #2: A first-order pole

$$X_2(s) = \frac{1}{s-a} = \frac{1}{X_1(s)}$$

$$\Rightarrow |X_2(s)| = \frac{1}{|X_1(s)|} \quad (\log|X_2(s)| = -\log|X_1(s)|)$$

$$\text{and} \quad \angle X_2(s) = -\angle X_1(s)$$

Example #3: A higher-order rational Laplace transform

$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)}$$

$$|X(s)| = |M| \frac{\prod_{i=1}^R |s - \beta_i|}{\prod_{j=1}^P |s - \alpha_j|}$$

$$\text{and} \quad \angle X(s) = \angle M + \sum_{i=1}^R \angle(s - \beta_i) - \sum_{j=1}^P \angle(s - \alpha_j)$$

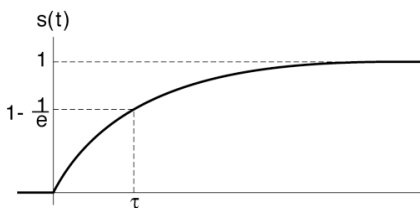
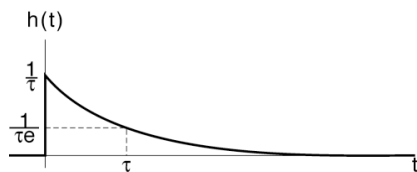
13

First-Order System

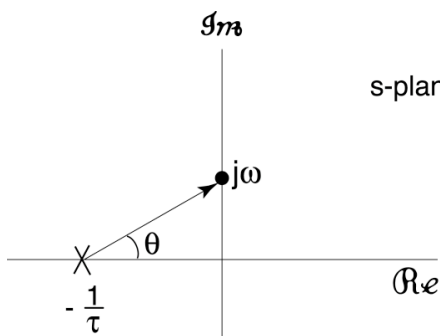
$$H(s) = \frac{1}{s\tau + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}, \quad \text{Re}(s) > -\frac{1}{\tau}$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

$$s(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t)$$



Graphical evaluation of $H(j\omega)$:



s-plane

$$H(j\omega) = \frac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/\tau}{\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}} = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 1/\sqrt{2} & \omega = 1/\tau \\ \sim 1/\omega\tau & \omega \gg 1/\tau \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) = -\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1/\tau}\right) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

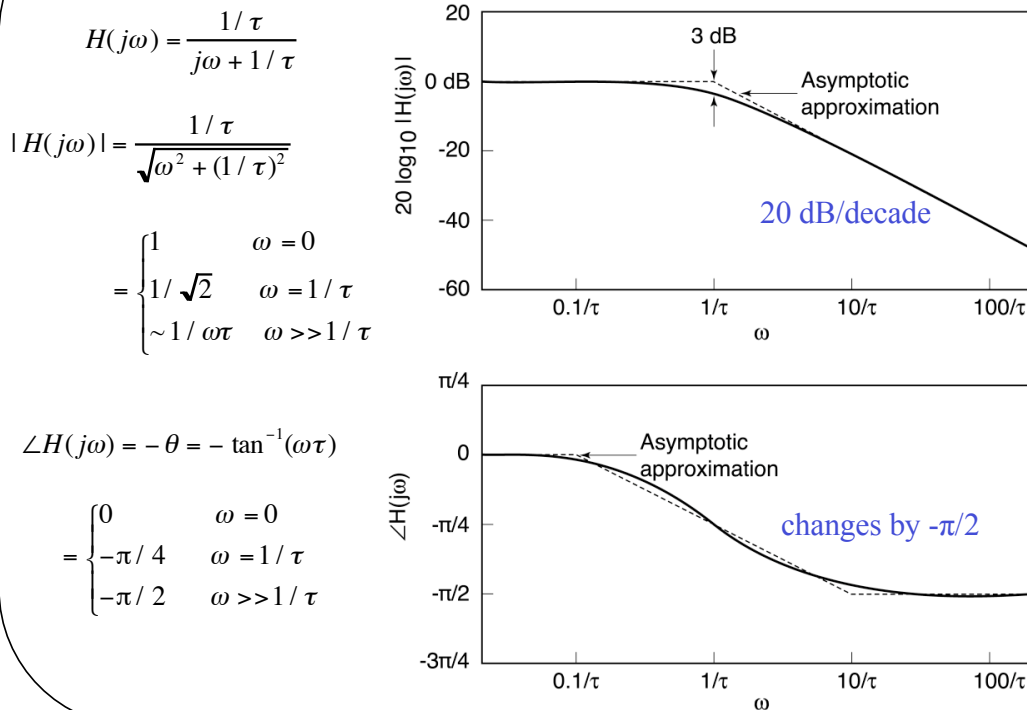
$$= \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ -\pi/4 & \omega = 1/\tau \\ -\pi/2 & \omega \gg 1/\tau \end{cases}$$

block diagram을 그려보자.

causal이다.

14

Bode Plot of the first-order system



15

지금까지는 1st order system

이제부터는 2nd order system

Second-Order System (causal)

E.g. LCR circuit, a mechanical system with a spring and friction

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{ROC } \text{Re}(s) > \text{Re}(\text{pole})$$

$0 < \xi < 1 \Rightarrow$ complex poles
— **Underdamped**

$\xi = 1 \Rightarrow$ double pole at $s = -\omega_n$
— **Critically damped**

$\xi > 1 \Rightarrow$ 2 poles on negative real axis
— **Overdamped**

1st, 2nd order system
이 중요한 이유는

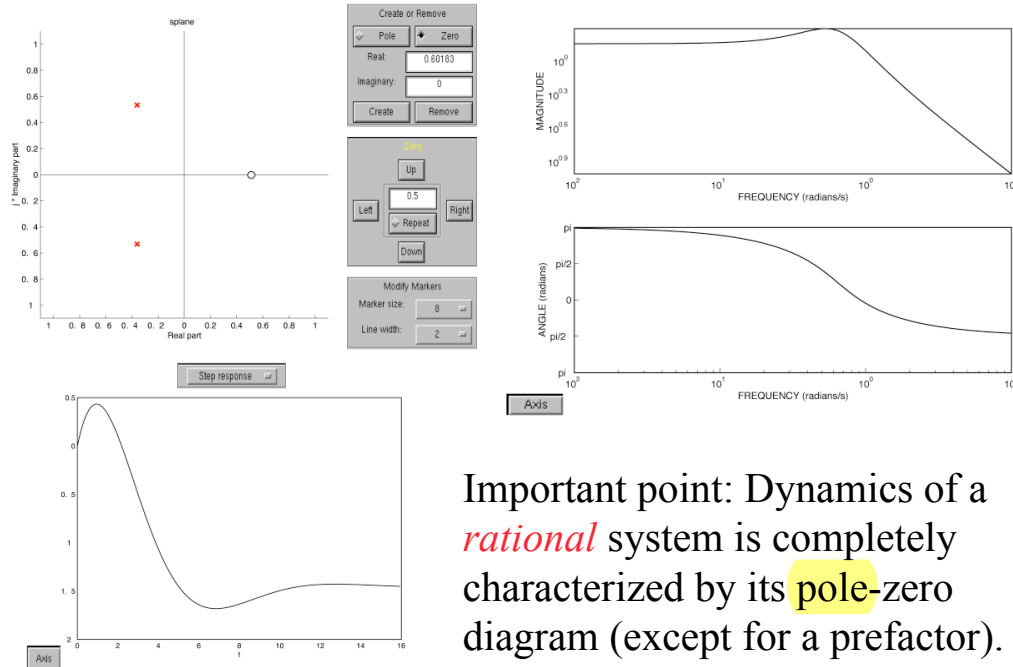
LCCDE with **real coefficients**로 나타내어
지는 수 많은 CT LTI
system의 system
function을 factoring하든
가 PFE 하면
1st와 2nd order system
들의 곱또는 합으로 나타
나기 때문이다.

(물론 증거가 있으면 그
이상의 차수도 필요하다.)

이렇게 불리는 이유를 먼
저 time domain에서
step response를 보면서
이해하자.

따라서 다음 페이지 전에
먼저 **page 19**를 보라.

Demo Pole-zero diagrams, frequency response, and step response of first-order and second-order CT causal systems



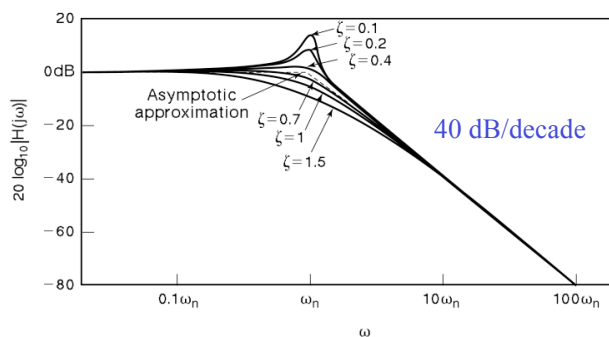
17

underdamped일 경우 pole이 conjugate pair로 나타나는데 여기에 $u(t)$ 를 가하면 따라서 oscillatory성분이 나타날 수 밖에 없다.

반면 중근이거나 서다두실 근일 경우 oscillatory성분이 없을 수밖에 없다.

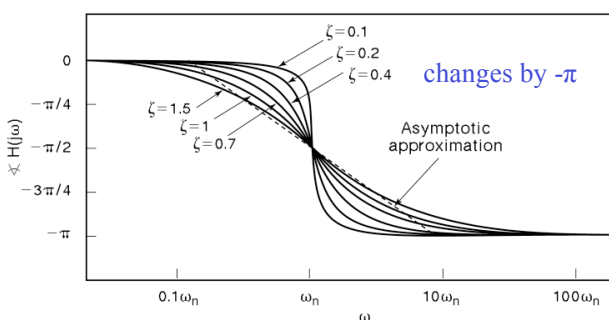
따라서 time domain상의 behavior를 설명하는데 있어 FT보다 LT가 보다 유용하다.

Bode Plot of a Second-order System



Top is flat when $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707$
 $\Rightarrow$ a LPF for $\omega < \omega_n$

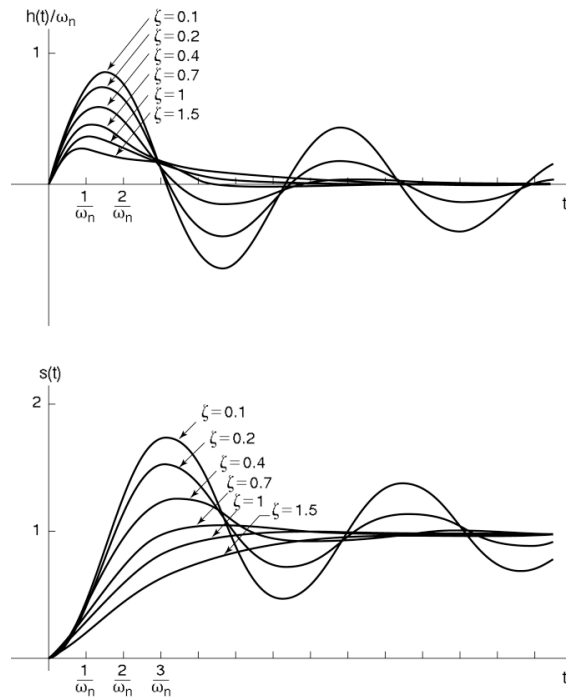
underdamped일 경우 ω_n 근처의 frequency component가 살아 남는다.



근사적으로 보아 underdamped에서는 ω_n 성분이 있으므로 oscillatory behavior가 일어난다.

18

Unit-impulse and Unit-step Response of a Second-order System



No oscillations when $\zeta \geq 1$
 $\Rightarrow$ Critically (=) and over (>) damped.

반면 critically 와 overdamped 경우에는 ω_n 성분이 많이 attenuate 된다. 따라서 underdamped 경우 보다 response가 천천히 변할 것이다.

19

under/critical/over damp라는 이름의 유래는 이 step response에서.... underdamped의 경우 빠르게 움직이나 대신 overshoot하고 또 oscillate 한다. 반면.... step response의 LT은 system function에 $1/s$ 곱한 것이다. PFE하면 $1/s$ 성분과 $1/(s - \text{근})$ 성분들이 나온다. 따라서 근이 어디 있는냐에 따라 oscillation이 있으면서 $u(t)$ 로 가는지 없으면서 가는지 등이 결정된다.

First-order All-Pass System

$$H(s) = \frac{s - a}{s + a}, \quad \text{Re}(s) > -a \quad (a > 0)$$

(a) Two vectors have the same length

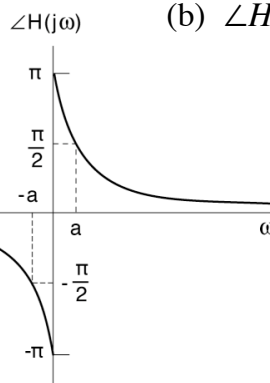
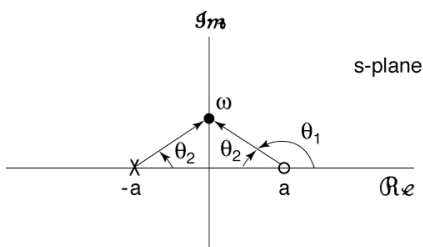
$$\Rightarrow |H(j\omega)| = 1$$

(b) $\angle H(j\omega) = \theta_1 - \theta_2$

$$= (\pi - \theta_2) - \theta_2$$

$$= \pi - 2\theta_2$$

$$= \begin{cases} \pi & \omega = 0 \\ \pi / 2 & \omega = a \\ \sim 0 & \omega \gg a \end{cases}$$



먼저 block diagram을 그려 보자.

다음 pole-zero diagram을 그려서 geometrical하게 생각하여

왜 이 system이 all pass인지 확인해 보자.

20