

이 note에서는

1. desirable Fourier

transform을 갖는 real, causal, stable filter를 design하고자 한다.

2. 이를 위해 LCCDE를 이

용하기로 하고, frequency domain보다 디자인 하기 편리한 s-domain으로 가서

$H(s)H(-s)$ 를 디자인한다. 여기서 중요한 것은 고무판 비유에서 처럼 pole의 위치를 잘 정하는 것이다. 정함

에 있어 유의사항은 s_0 가 pole이면 $-s_0$, s_0^* , $-s_0^*$ 도 pole이라는 것이다.

3. $H(s)H(-s)$ 의 pole의 위

치를 정하고 나면 LHP 에 있는 pole들만 모아 $H(s)$ 에 몰아주고 ROC는 right-side of the rightmost pole로 정한다.

4. 이제 필요한 것은 미분기

적분기 컴바이너 증폭기를 써서 시스템을 실제로 합성해 내는 것이다. 미분기를 쓰는 간단한 방법도 있지만, 적분기만을 쓰는 방법도 있다.

는 것을 배운다.

그리고 나서 포커스를 LCCDE로 나타나는 affine인 nonlinear system의 디자인과 해석에 대해 공부한다.

EECE233 Signals and Systems

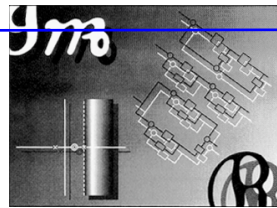
Lecture Note #15

Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

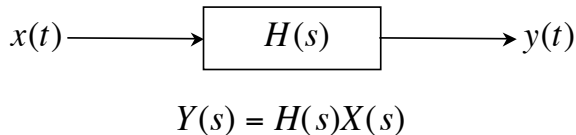
- Covers O&W pp. 698-720
- CT System Function Properties
- Frequency response revisited
- Block diagrams
- Unilateral Laplace Transform and Applications

* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.



1

CT System Function Properties



- 1) System is stable, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \Leftrightarrow \text{ROC of } H(s) \text{ includes } j\omega \text{ axis}$
- 2) Causality, $h(t)$ right-sided signal $\Leftrightarrow \text{ROC of } H(s) \text{ is right-sided}$

Question:

If the ROC of $H(s)$ is a right-half plane, is the system causal?

Example: $H(s) = \frac{e^{sT}}{s+1}$ $\text{Re}(s) > -1 \Rightarrow h(t)$ right-sided

A. No.

왜냐하면 impulse response가 $e^{-(t+T)}u(t+T)$ 인데 만약 $T > 0$ 이면 non-causal이 된다. 주의! 모든 $H(s)$ 가 rational인 것은 아니다!!!!

2

우리의 주요 관심사는

LCCDE로 input-output relation이 나타나는 causal LTI system이다.

이 사실을 염두에 두고 하나하나 결과를 확인해 보기 바람.

여기까지는 bilateral LT

여기부터는 unilateral LT. unilateral LT로, initial condition이 있는 LCCDE으로 나타나는 system을 다룬다. 즉, LTI가 아닌 LCCDE로 나타나는 시스템, affine인 nonlinear system을 다룬다.

곧, discrete-time에서 bilateral과 unilateral z-transform을 배우는데 특히 unilateral z-transform을 이용하면, 고등학교에서 배운, 점화식이 주어지고 일반항을 구하는 문제를 직관적으로 상당수 해결할 수 있다.

absolutely integrable $\Leftrightarrow$

BIBO stable

$\Leftrightarrow$ FT exists (not necessarily inverse FT, not necessarily Fourier Plancherel transform exist.)

주의: e^{sT} 는 rational이 아니다.

LCCDE로 시스템을 디자인하고 싶을때, 우리는 많은 경우 두가지에 관심이 있다. 하나는 stable한 system을 디자인할 것인가 말것인가를 결정해야 하고 다른 하나는 causal한 system을 디자인 할 것인가 말 것인가를 결정해야 한다. 보통은 causal stable system을 디자인 하기를 원한다. 하지만 언제나 그런 것은 아니다.

우리는 causal한 real-world 시스템을 LCCDE로 모델링 하는 경우를 많이 다루므로, 이 경우에 특화하여 ROC의 성질을 확인하자.

Properties of CT Rational System Functions

a) However, if $H(s)$ is rational, then

The system is causal $\Leftrightarrow$ The ROC of $H(s)$ is to the right of the rightmost pole

b) If $H(s)$ is rational and is the system function of a causal system, then

The system is stable $\Leftrightarrow$ $j\omega$ -axis is in ROC
 $\Leftrightarrow$ all poles are in LHP
 $\Leftrightarrow \mathcal{F}\{h(t)\}=H(j\omega)$ exist

3

$H(s)$ is rational $\Leftrightarrow$ LTI w/ I/O in LCCDE.

LCCDE로 나타나는 시스템 분류

- 1) linear, nonlinear (zero input zero output 인가?)
(LCCDE는 linear $\Leftrightarrow$ LTI)
- 2) causal, noncausal, anticausal
- 3) stable, unstable

Q. LCCDE로 나타나는 LTI system은

- 1) causal일수도
- 2) anti-causal일수도
- 3) noncausal일수도 있다.

causal하다면?
A. $\Leftrightarrow$ ROC는 right-sided이다. $j\omega$ axis를 포함할 수도 있고 안할 수도 있다.

Q. a)에 의해서 ROC는 right-sided이지만, 이 시스템은 1) stable 할 수도 2) stable 안 할 수도 있다.
만약 stable하다면....?

A.
LCCDE로 나타나는 causal LTI system의 경우,

stable $\Leftrightarrow$ absolutely integrable $h(t)$ $\Leftrightarrow$ Frequency response exists $\Leftrightarrow$ all poles are in LHP

즉, causal LTI with LCCDE가 stable 하면 Fourier transform으로도 다룰 수 있다.

Checking if All Poles are in the Left-Half Plane

-> 그렇지 않으면 causal이라 해도 stable하지 않다.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Poles are the roots of $D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$

Method #1: Calculate all the roots and see! MATLAB will be a life saver.

Method #2: Routh-Hurwitz — Without having to solve for roots.

	Polynomial	Condition so that all roots are in the LHP
First - order	$s + a_0$	$a_0 > 0$
Second - order	$s^2 + a_1s + a_0$	$a_1 > 0, a_0 > 0$
Third - order	$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$	$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$
	$\vdots$	and $a_0 < a_1a_2$
	$\vdots$	$\vdots$

4

이제 한 차원 높은 Laplace transform을 이용하여, 한 차원 낮은 Fourier transform을 원하는 모양으로 디자인하는 법을 배우자.

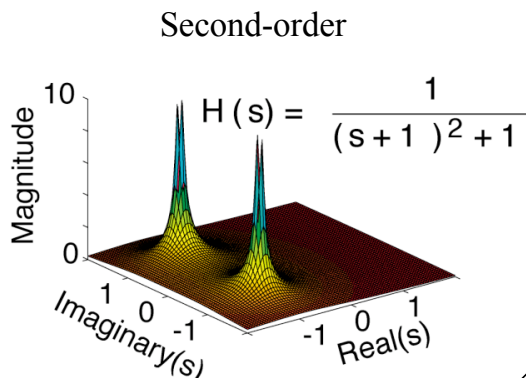
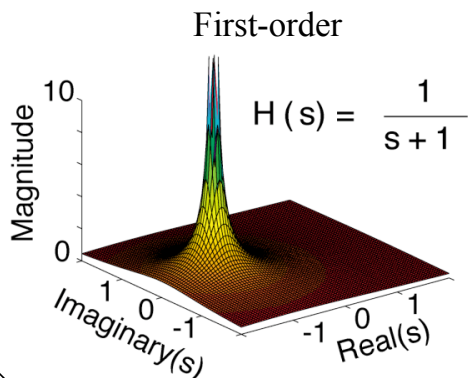
앞서 우리는 time-domain에서 impulse response를 원하는 모양으로 만들어 시스템을 디자인 하거나, frequency domain에서 FT을 원하는 모양으로 만들어서 시스템을 디자인할 수 있다는 것을 배웠지만, arbitrary한 impulse response나 arbitrary한 frequency response를 어떻게 구현할 지 몰랐다. 이제 LCCDE를 이용해 구현하려 하는데, time domain에서는 어렵고, frequency domain에서는 주먹구구만 가능한데, 이제 LT를 이용하면 좀더 덜 주먹구구로 LCCDE로 표현되는 LTI를 만들 수 있다.

A helpful trick to visualize $|H(s)|$

Imagine that $|H(s)|$ resembles the top of a tent, and

- a **pole** in $H(s)$ corresponds to a supporting **pole of the tent**
- and a **zero** in $H(s)$ corresponds to a stake nailing down the tent.

Example and Demo: A first-order and a second-order system $|H(s)|$.



결론을 요약하면, $|H(s)|$ 는 pole에서 위로 막대를 세우고 zero에서는 바닥에 못을 박은 고무판 모양이 된다.

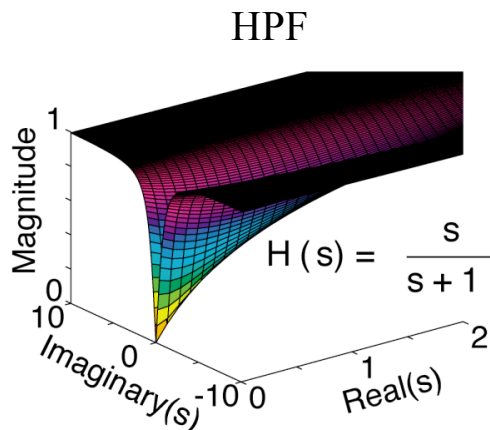
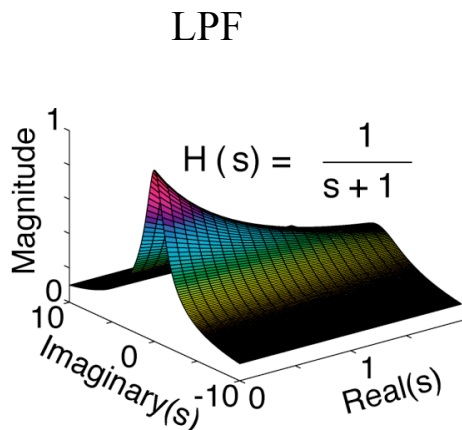
이를 이용하면 원하는 FT을 근사하는 LCCDE로 나타나는 필터를 디자인할 수 있다. 다음다음 페이지의 **Butterworth** filter 예를 보라.

5

A helpful trick to visualize $|H(s)|$ (cont.)

With this mechanical analog, then the amplitude of the frequency response $|H(j\omega)|$ is simply the top of the tent cut along the imaginary ($j\omega$) axis.

Example: Frequency response of a first-order low-pass and a high-pass filter.



6

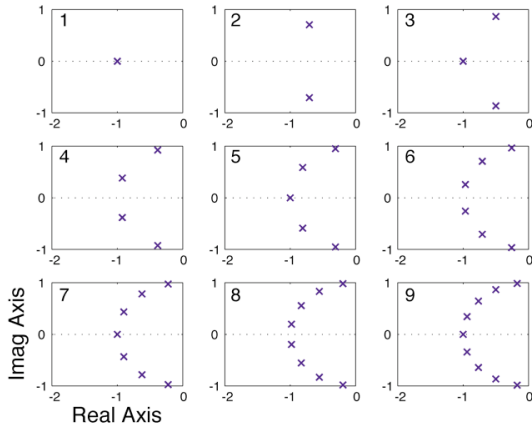
An exercise based on this intuitive understanding

Design a good low-pass filter

Two important features for a good filter:

- $|H(j\omega)|$ is flat within the passband, and
- $|H(j\omega)|$ decreases rapidly in the stopband.

Then how about place all the poles *evenly* along a *semi*-circle (all the *poles* must be in *LHP* for stability) to make a flat tent top? (Actually, this is how we make a flat drum top.) $\Rightarrow$ **Butterworth filter**.



The system function of the *n*th-order Butterworth filter, $H_n(s)$, is obtained from the property

$$H_n(s)H_n(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2n}},$$

where ω_c is the cut-off frequency.

n-th order Butterworth filter 는 *n* 개의 LHP pole 을 갖고
원점과 pole간의 거리는 ω_c 이다.

주의할 점은

$s = j\omega_c$ 로부터 원상에
등간격으로 pole을 배치하
면

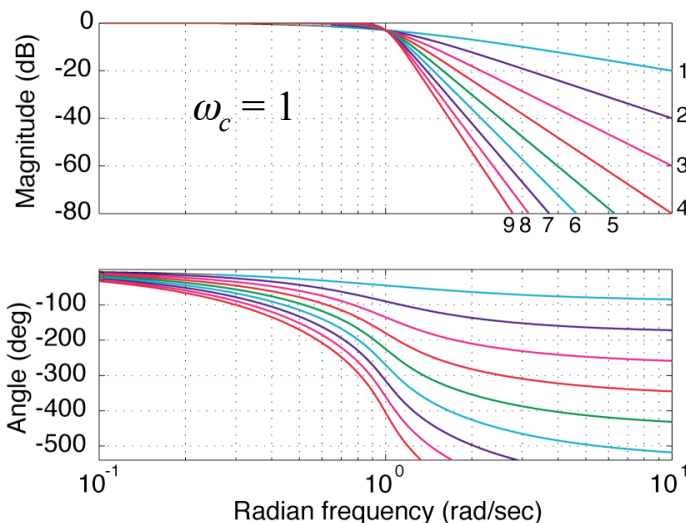
*n*이 짝수일때 pole이 $s = j\omega_c$
axis상에 나타나게
된다.

이를 막기 위해 *n*이 짝수일
때는 pole의 위치를 돌린다.
그래서

$H_n(s)H_n(-s) = 1/(1 - (s/\omega_c)^{2n})$ 이 아니
라 j 가 들어있다.

Frequency response of Butterworth filters

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}.$$



As more *poles* are added (higher-order Butterworth filter), the LPF gets better. **MATLAB Demo**.

이 note의 설명이 조금 이상한데, 보다 정확한 설명은 다음과 같다.

1. 우리가 원하는 것은

$|H(j\omega)|$ 가 cutoff frequency까지는 flat하고 그 이후 급격히 작아지기를 원한다.

2. $|H(j\omega)|$ 를 다루나 $|H(j\omega)|^2$ 을 다루나 같으니 $|H(j\omega)|^2$ 을 다루자.

3. 그런데 FT로는 어떻게 해야할 지 잘 모르겠으니 한 차원높은 곳에서 볼수 있게 해 주는 LT사용하자. 이를 위해서는

filter가 real valued일 때는

$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) \mid s = j\omega$ 라는 관계식이 성립함을 이해해야 한다.

4. 따라서 $H(s)H(-s)$ 의 pole-zero diagram을 그려야 하는데,

만약 s_0 가 $H(s)$ 의 pole이면

s_0 뿐만 아니라 이와 원점대칭인 $-s_0$ 도 $H(s)H(-s)$ 의 pole이 된다.

5. 이제 텐트에 막대를 세우는 것을 생각하면

s_0 에 막대를 세우면 $-s_0$ 에도 세워야 한다. 따라서

ω_c 를 반지름으로 하는 unit circle위에 pole들을 원점 대칭으로 배치하면

텐트의 지붕이 flat하게 될 터이다.

6. 이 텐트지붕을 $j\omega$ 축으로 잘라보면 원하는 magnitude response가 얻어진다. 이렇게 얻어진 filter를 Butterworth filter라한다.

$h(t)*h(-t)^*$ 의 LT을 생각하면

$H(s)H(-s^*)^*$ 이 되어 $H(s)H(-s^*)^*$ 가

s_0 에서 풀이면

$-s_0^*$ 에서 풀이다. 즉 y축 대칭점에서 풀이다.

그런데 이에 더하여 우리가 여기서 원하는 것은 real coefficient를 갖는 real 임펄스 응답신호이므로

$h(-t)=h(t)^*$ 이 되어

$h(-t)$ 의 LT인 $H(-s)$ 와 $h(t)^*$ 의 LT인 $H(s)^*$ 가 같아져서

$H(s)H(-s)$ 로 바꿔 생각해도 된다.

이렇게 하면 $H(s)H(-s)$ 가 s_0 에서 pole이면 원점대칭점인 $-s_0$ 에서도 풀이된다.

LTI Systems Described by LCCDE's

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Repeated use of differentiation property: $\frac{d}{dt} \leftrightarrow s$, $\frac{d^k}{dt^k} \leftrightarrow s^k$

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

$$\Downarrow Y(s) = H(s)X(s)$$

Where $H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\underbrace{\sum_{k=0}^N a_k s^k}_{\text{Rational}}}$ $\leftarrow$ roots of numerator $\Rightarrow$ zeros
 $\leftarrow$ roots of denominator $\Rightarrow$ poles

ROC =? Depends on: 1) Locations of **all** poles.
 2) **Boundary conditions**, i.e. right-, left-, two-sided signals.

다시 강조하지만, LCCDE가 LTI가 되려면 zero input zero output이 성립하도록 initial conditions가 주어져야 한다.

LCCDE로 나타나는 LTI에는 세가지가 있다.
 causal, noncausal, anticausal

LCCDE로 나타나는 causal LTI에는 두가지가 있다.
 stable, unstable

즉, **causal**하다고 하면 2)는 right-sided로 결정된다.

9

9페이지에서는 LCCDE 에서 rational H(s)를 구했고, 여기서는 rational H(s)에서 LCCDE를 얻거나 아니면 block diagram을 얻거나

Block Diagram for Causal LTI Systems with Rational System Functions

Example: $Y(s) = H(s)X(s)$

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \right) (2s^2 + 4s - 6) \quad \text{--- Can be viewed as cascade of two systems.}$$

Introduce $W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s)$ --- output of the first subsystem

$\Downarrow$

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 3 \frac{dw(t)}{dt} + 2w(t) = x(t), \text{ initially at rest}$$

or $\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = x(t) - 3 \frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$

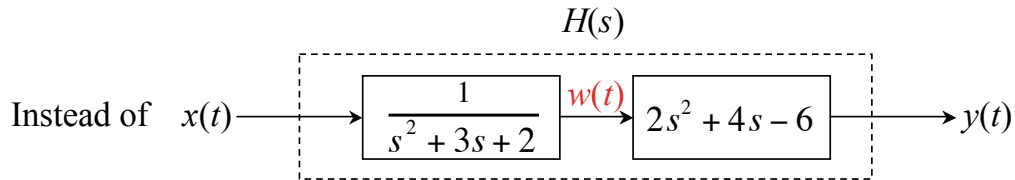
Then $Y(s) = (2s^2 + 4s - 6)W(s)$

$\Downarrow$

$$y(t) = 2 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 4 \frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

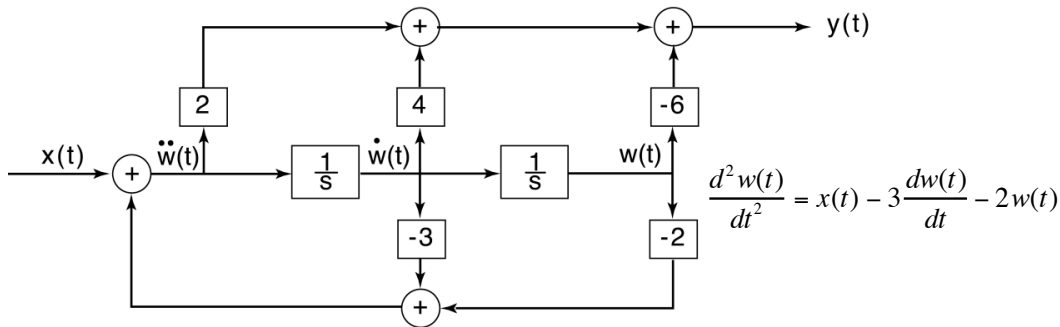
분모로 나눠서 차수를 줄인 후에 PFE해도 되고....
 이렇게 **factoring**해 버리고 두개의 시스템의 연결로 구현해도 된다.

Example (continued)



We can construct $H(s)$ in the following:

$$y(t) = 2 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 4 \frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$



Notation: $1/s$ — an integrator

Q1. 왼쪽의 block diagram에서처럼 cascaded subsystems로 나뉘는데 미분기 적분기 등을 이용해서 나타내 보라.

A. 놀랍게도 **적분기** 만으로 구현할 수 있다.

Q2. 미분기만을 써서 구현할 수 있을까?

$$\frac{d^2 w(t)}{dt^2} = x(t) - 3 \frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$$

그림을 그리는 순서는 다음과 같다.

1. 먼저 input을 그린다.
2. 다음에 오른쪽 block의 입출력 관계로 부터 가장 높은 차수인 $w(t)$ 의 이계미분을 표시하고 적분기를 연속해서 사용하여 $w(t)$ 의 일계미분, 그리고 $w(t)$ 를 표시한다.
3. 이 입력 $x(t)$ 와 와 무슨 관계인지의 미분방정식으로 $x(t)$, $w(t)$ 의 0,1,2계미분을 연결한다. 그리하여
4. 이제 왼쪽의 block으로부터 얻은 출력과 $w(t)$ 의 0,1,2 계 미분의 관계로부터 연결법을 찾는다.

LCCDE로 input-output이 나타나는 system중에서 LTI만이 유용한 것은 아니다. initial condition이 있어서 zero-input zero-output이 아닌 유용한 system이 많다. 이를 다루기 위한 것이 unilateral Laplace transform이다.

ULT은 initial rest condition을 만족하지 않는 LCCDE에 causal signal 입력이 가해질 때 출력 계산에 주로 사용된다.

이런 system은 nonlinear system이지만 그래도 LTI에 가장 가까운 것들이라 분석하는 법이 유사하다.

Q. BLT와의 차이는, ROC에 대해 더 언급할 필요가 없다는 것이다. why?

A. causality를 가정하고 있으므로

The Unilateral Laplace Transform

(THE tool to analyze causal CT systems described by LCCDE's with initial conditions)

Definition: $\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \mathcal{UL}\{x(t)\}$

1) If $x(t) = 0$ for $t < 0$, then $\mathcal{X}(s) = X(s)$

2) Unilateral LT of $x(t) = \text{Bilateral LT of } x(t)u(t)$

3) For example, if $h(t)$ is the impulse response of a causal LTI system, then

$$H(s) = \mathcal{X}(s)$$

4) Convolution property: If $x_1(t) = x_2(t) = 0$ for $t < 0$, then

$$\mathcal{UL}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$$

Same as bi-lateral Laplace and Fourier transform

Dirac delta를 어떻게 정의 하더라도 0에서 부터 적분 할때 잘려 나가는 일이 없 도록 하기 위함.

이를 위해서 $u(t)$ 는 right-continuous unit step function으로 정의되어야 한다.

즉, causal system의 ULT을 구하기 위해서는 그 causal system의 LT을 구하면 된다.

둘다 causal signal이면 convolution도 causal하다. 따라서 LT과 ULT은 같다.

즉, causal signals의 convolution의 ULT을 구하려면 각각 LT하여 곱하면 된다. The ULT of the convolution of two causal signals equals the product of the ULTs of the causal signals.

12

"causal signal의 LT은 ULT과 같다. 따라서 신호가 causal이라는 것이 알려져 있다면 IULT하는 것은 causal하도록 ILT하는 것과 같다."

즉, right-sided exponential $e^{at}u(t)$ 의 ULT은

$1/(s-a)$ 이고 ROC는 $\text{Re}(s-a) < 0$ 인데,

ULT이

$1/(s-a)$ 이라면

이의 IULT은

이의 LT중 causal한 $e^{at}u(t)$ 가 된다.

여기서 알수 있는 바와 같이 ULT에서는 ROC가 자명하게 얻어진다.

circuit theory에서 배웠듯, RLC circuit으로 시스템을 구성하면, L은 미분기 C는 적분기로 볼 수 있다. time reference 0을 기준으로 이들 LC중 initial condition이 zero가 아닌 경우에도, 0+부터 어떤 입력을 가하여 system의 output이 원하는 값이 되도록 하는 일이 중요하다.

integration property
for ULT

'of causal signal'까지
한 덩어리로 봐야한다.

주의!!!
적분구간이 0-에서 무한
대이다!!!!

causal signal의 0-로부
터의 integrator output
의 ULT을 구하기위해서
는, causal x(t)의 ULT
과 unit step의 ULT을 곱
하면 되는데, 둘다 causal
signal이므로
각각의 LT을 구해 곱하면
된다. u(t)는 신호자체가
causal이므로 LT과 ULT
가 같다.

Integration Property for Unilateral Laplace Transform

Recall: $\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \stackrel{x(t<0)=0}{=} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$

and from the previous page:

$$\mathcal{UL}\{x(t) * u(t)\} = \mathcal{X}(s) \cdot \mathcal{UL}\{u(t)\}$$

Hence, $\mathcal{UL}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} u(t) e^{-st} dt$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-st} dt}_{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{1}{s}$$

then $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} \mathcal{X}(s)$ — same as bilateral LT

여기서 주의할 것은, x(t)는 causal일 필요가 없다는 것이다. 물론 x(t)가 causal이면 당연히 성립한다.
따라서 expression은 오해의 소지가 크다. 다만, x(t)의 ULT는 X(s)다. 라고만 말하면 충분하다. 왜냐하
면 ULT X(s)로 부터 noncausal x(t)를 만들수는 없기 때문이다.
주의: BLT과 달리 중대한 차이가 있다!!!!

Differentiation Property for Unilateral Laplace Transform

$$x(t) \longleftrightarrow \mathcal{X}(s)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

Derivation:

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}_{\mathcal{X}(s)}$$

$$= s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

Note:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} \longleftrightarrow s \underbrace{\mathcal{UL}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}}_{s\mathcal{X}(s) - x(0^-)} - x'(0^-)$$

$$\longleftrightarrow s^2 \mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

both-sided signal x(t)의
미분의 unilateral LT을 구
하자. 언뜻생각하면, 어차
피 ULT은 t가 음수부분은
무시하므로 x(t)의
t<0에서의 값은 필요 없을
것 같다.

하지만, 미분이라는 것이
그 점에서의 좌우값에 영향
을 받기 때문에 그 영향이
나타난다.

예를 들어

x_1(t)는 t<0에서 1이고
나머지 는 0,
x_2(t)는 언제나 0이다.

둘의 ULT은 0으로 같지
만,
미분하면 x_1(t)는 t=0에
서 Dirac delta가 나타나고
x_2(t)는 그렇지 않다.

Use ULT's to Solve Differential Equations with Initial Conditions

Example:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = \beta, \quad y'(0^-) = \gamma, \quad x(t) = \alpha \cdot u(t)$$

Take $\mathcal{ULT}$'s:
$$\underbrace{s^2 \mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma}_{\mathcal{ULT}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\}} + 3 \underbrace{[\mathcal{Y}(s) - \beta]}_{\mathcal{ULT}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}} + 2\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$$\mathcal{Y}(s) = \underbrace{\frac{\beta(s+3) + \gamma}{(s+1)(s+2)}}_{\text{ZIR}} + \underbrace{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}_{\text{ZSR}}$$

ZIR — Response for zero input $x(t)=0$.

ZSR — Response for zero state, $\beta=\gamma=0$, initial at rest.

좌측의 LCCDE는 모든 t 에서 성립하므로 $t>0^-$ 에서도 성립한다. 따라서 ULT을 해도 성립한다. 따라서 이를 이용하여 $y(t)$ 의 $t>0^-$ 에서의 응답을 구할 수 있다.

$x(t)$ 와 $y(t)$ 는 모두 causal하다고 가정한다.

여기서 causal이란 $t \geq 0^-$ 에서 non-zero를 가질 수 있는 신호.

ULT는 linear operator 이고

항등인 두 causal 신호의 ULT는 같으므로...

LCCDE with initial condition에 input을 가했을때의 output은 ZIR와 ZSR의 합으로 나타난다.

어디서 본듯한????

linear ODE의 homogeneous solution과 particular solution!!!!

주의: zero state response는 input에 따라 다른 값이 된다. 여기서는 $\alpha u(t)$ 를 가했을때의 ZSR를 구했을 뿐이다.

zero input response는 말 그대로 input에 zero를 넣었을때 나오는 response이다. 이 response가 zero이면 LTI가 되지만, zero가 아니면 LTI가 아니다.

causal신호만 다루므로, right sided exponential로 inverse LT하면 된다.

Example (continued)

- ZSR** — Response for LTI system initially at rest ($\beta = \gamma = 0$)

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- ZIR** — Response to initial conditions alone ($\alpha = 0$).

For example:

$$x(t) = 0, \quad y(0^-) = \beta = 1, \quad y'(0^-) = \gamma = 0$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Fourier transform에서는 $x(0)$ 을 $X(j\omega)$ 로 구하는 법이 있다. (How?)

Unilateral LT에서는 주어진 signal 이 $t=0$ 이후에서 정의될때, $x(0)$ 의 값과 $x(\infty)$ 의 값을 ULT로부터 구할 수가 있다.

More About Unilateral Laplace Transform

- Initial- and Final-value Theorem**

If $x(t) = 0$ at $t < 0$, then

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Proof: From the differentiation property:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0) \quad (1)$$

$$\text{L.H.S.} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = \begin{cases} \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \cdot 0 \cdot dt = 0 & \text{for } s \rightarrow \infty \\ \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} dt = x(\infty) - x(0) & \text{for } s \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{Then, Eq. (1)} \Rightarrow \begin{aligned} x(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \\ x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \end{aligned}$$

QED

17

간단한 example을 생각하자.

$x(t) = 5e^{at}u(t)$ 라고 하면 $x(0)$ 는 5여야 한다. $X(s) = 5/(s-a)$ 이므로 $sX(s)$ 에서 s 를 무한대로 보내면 initial value가 나온다.

앞서 p. 15에서 initial value를 보면 beta가 된다.

===== 간단한 example을 생각하자.

$x(t) = 5u(t)$ 라고 하면 $x(\infty) = 5$ 여야 한다. $X(s) = 5/s$ 이므로 $sX(s)$ 에서 s 를 0으로 보내면 (이미 s 를 무한대로 보내면 0에서라고 했으므로 당연히 ...) final value가 나온다.

앞서 p. 16에서 final value를 보면 alpha/2가 된다.

Applications of the Initial- and Final-Value Theorem

For
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

n – order of polynomial $N(s)$, d – order of polynomial $D(s)$.

- Initial value:**

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \begin{cases} 0 & d > n+1 \\ \text{finite} \neq 0 & d = n+1 \\ \infty & d < n+1 \end{cases}$$

Eg. $X(s) = \frac{1}{s+1}$ $x(0) = ?$

- Final value (E.g. tracking error)**

If

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} X(s) < \infty.$$

$\Rightarrow$ No poles at $s = 0$.