

EECE233 Signals and Systems

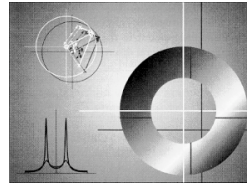
Lecture Note #16

Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O&W pp. 741-763
- The (Bilateral) z -transform and its ROC
- Properties of the ROC
- Inverse z -Transform
- Examples

* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.



1

CT에서 FT의 확장인 LT를 배웠듯, DT에서 FT의 확장인 ZT를 배운다.

LT와 ZT는 많은 유사점을 가지므로 유사점과 차이점을 표로 만들어 숙지하자.

ZTF is very important for digital filter design, digital control, digital signal processing, digital communications, etc.

The z -Transform (another transform, any end?)

Motivation: Analogous to LT in CT

$$\begin{aligned} x[n] &\longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \\ &\Downarrow \\ x[n] = \underbrace{z^n}_{\substack{\text{Eigenfunction} \\ \text{for DT LTI}}} &\longrightarrow y[n] = H(z)z^n \end{aligned}$$

(From Lecture #5)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \text{ (assuming it converges)}$$

The (Bilateral) z -Transform

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = Z\{x[n]\} \quad - \quad z\text{-transform}$$

LT와의 유사점:

1. ZT은 1-D discrete-parameter signal을 2-D continuous-parameter signal로 transform한 것으로 볼 수 있다.

이 새로운 signal의 domain은 1-D complex plane (z -plane)의 부분 집합이다.

2. 서로 다른 두 신호가 같은 모양의 algebraic mapping rule을 가질 수가 있다. (물론 ROC는 다르지만...)

3. LT에서와 마찬가지로 ROC를 명시해야 한다.

ZTF은 $(\dots, x[-1], x[0], x[1], \dots)$ 을 2^{nd} polynomial $\dots + x[-1]z^1 + x[0] + x[1]z^{-1}$ 로 나타낸 것이라 생각하면 간단하다. 물론 이를 z 의 함수로 보면서 ROC를 명시해야 하겠다. 그런데 무한 terms면 rational이라 하지 않는다.

The z -Transform — DT Laplace Transform

Recall:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \stackrel{t=n\Delta t}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(n\Delta t) \cdot \Delta t}_{x[n]} \underbrace{(e^{s\Delta t})^{-n}}_z$$

↓ DT, Δt is now finite

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

where

$$z = e^{s\Delta t}$$

↓

$0^n = 0$ for n nonnegative, not defined elsewhere.

차이점

- 가장 두드러진 차이점은 z^{-n} 을 곱하므로 '0으로 나눌수 없다'와 관련된 여러 다른 상황이 생긴다는 것. LT에서는 항상 nonzero 값을 곱했다.
- '0으로 나눌수 없다'가 중요한데 이를 헛갈리게하는 conventino이 있다.

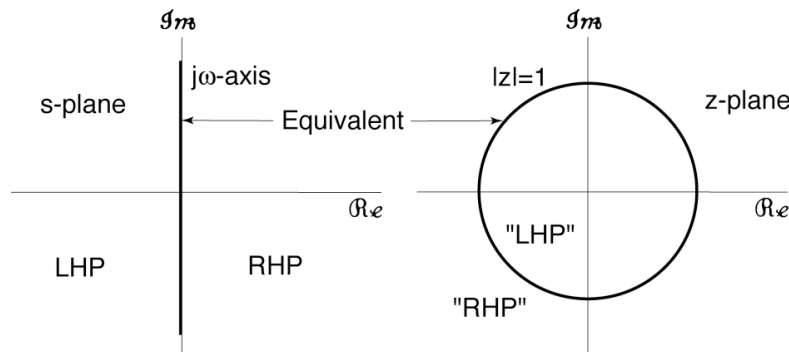
3. 그외 기타 차이 여럿....

3

The Relations Between zT and LT , s -plane and z -plane

$$e^{s\Delta t} = z$$

$j\omega$ -axis in s -plane ($s = j\omega$) $\Leftrightarrow |z| = |e^{j\omega \Delta t}| = 1$ — a unit circle in z -plane



- A vertical line in s -plane, $Re(s) = \text{constant} \Leftrightarrow |e^{s\Delta t}| = \text{constant}$, a circle in z -plane.
- LHP in s -plane, $Re(s) < 0 \Rightarrow |z| = |e^{s\Delta t}| < 1$, inside the $|z| = 1$ circle, special case, $Re(s) = -\infty \Leftrightarrow |z| = 0$.
- RHP in s -plane, $Re(s) > 0 \Rightarrow |z| = |e^{s\Delta t}| > 1$, outside the $|z| = 1$ circle, special case, $Re(s) = +\infty \Leftrightarrow |z| = \infty$.

4

The ROC and the Relation Between $\mathcal{ZT}$ and $\mathcal{DTFT}$

$$X(z) \stackrel{z=re^{j\omega}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

$$= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

$$ROC \in \left\{ z = re^{j\omega} \text{ at which } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

- depends only on $r = |z|$, just like the ROC in s -plane only depends on $\text{Re}(s)$
- Unit circle ($r = 1$) in the ROC $\Rightarrow$ DTFT $X(e^{j\omega})$ exists

LT에서와 같이:

이런 의미에서는 FT이
ZT보다 일반적이다. 그
러나...

5

Example #1 $x[n] = a^n u[n]$ — right-sided

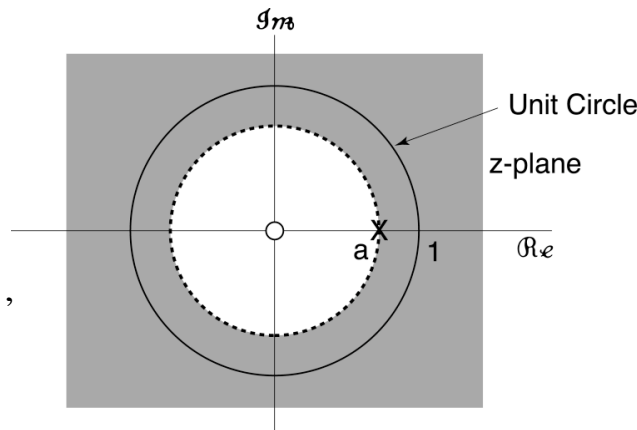
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(az^{-1})^n}_{\alpha}$$

$$= \frac{1 - (az^{-1})^\infty}{1 - az^{-1}} = ?$$

If $|az^{-1}| < 1$, i.e. $|z| > |a|$

$$\text{Then } X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a},$$

That is, ROC $|z| > |a|$,
outside a circle, "RHP"



가장 간단한 DT signal로
geometric sequence를
생각해 보자.

$x(t) = e^{at} u(t)$
의 LT에서와는 달리

pole at $z=a$ 와 zero at
 $z=0$ 가 동시에 나타난
다!!!!

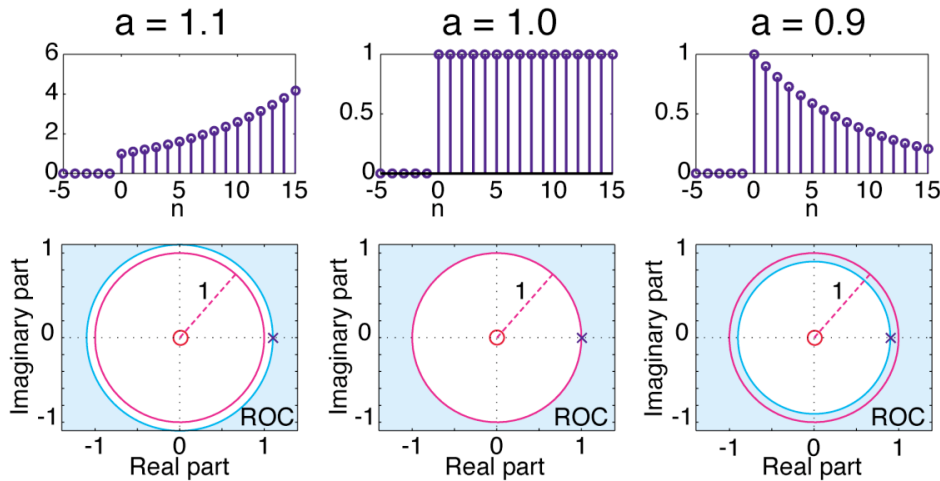
ROC가 0을 포함하지 않으
므로 z 를 분자분모에 곱하
여 오른쪽과 같이 z 의
polynomial로 분자분모나
타내면

pole과 zero의 위치를 쉽게
파악할 수 있다.

6

Example #1 (cont.)

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ for } |z| > |a|.$$



ROC outside $|z|=1$
unstable

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

include $|z|=1$
stable

7

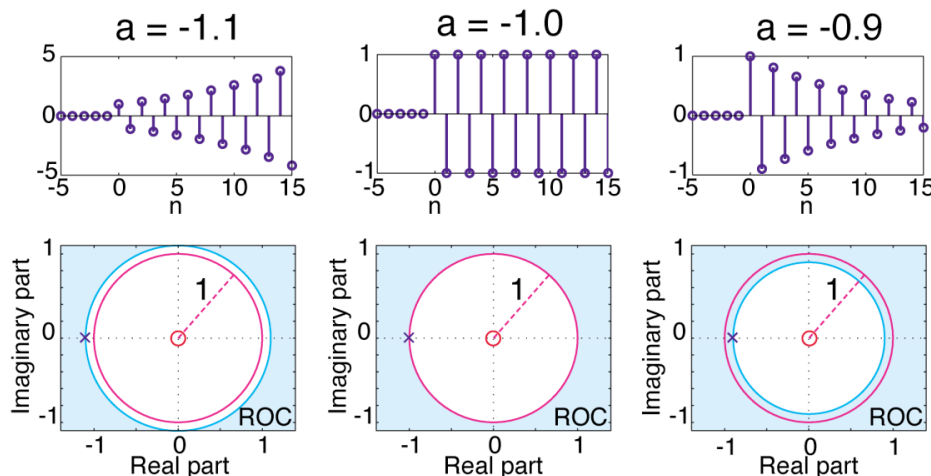
The signals are all right-sided and consequently the ROCs are all outside the circles.

The third one is DT Fourier transformable and its ROC contains the unit circle.

DT LTI's BIBO **stability** iff absolutely summable iff Fourier transformable.

Example #1 (cont.) — What if $a < 0$?

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \text{ for } |z| > |a|.$$



ROC outside $|z|=1$
unstable

include $|z|=1$
stable

8

The signals are all right-sided and consequently the ROCs are all outside the circles.

The third one is DT Fourier transformable and its ROC contains the unit circle.

Example #2: $x[n] = -a^n u[-n-1]$ — left-sided

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

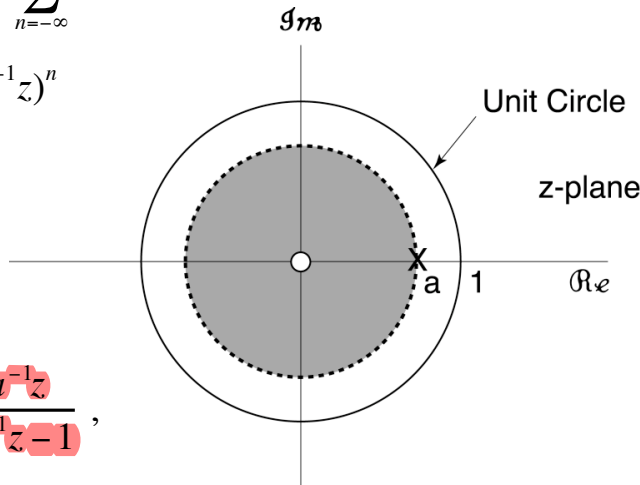
$$\stackrel{n \rightarrow -n}{=} - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

$$= 1 - \frac{1 - (a^{-1} z)^{\infty}}{1 - a^{-1} z} = ?$$

If $|a^{-1} z| < 1$, i.e. $|z| < |a|$

$$\begin{aligned} \text{Then } X(z) &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{a^{-1} z}{a^{-1} z - 1}, \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \end{aligned}$$

Same $X(z)$ as in Ex #1, but different ROC.



LT에서와 마찬가지로 ZT에서도 서로 다른 두 신호가 같은 algebraic한 form의 ZT를 가질 수 있다. 물론 ROC는 다르지만...

원점이 ROC에 포함되므로 가운데도 칠해야 한다.

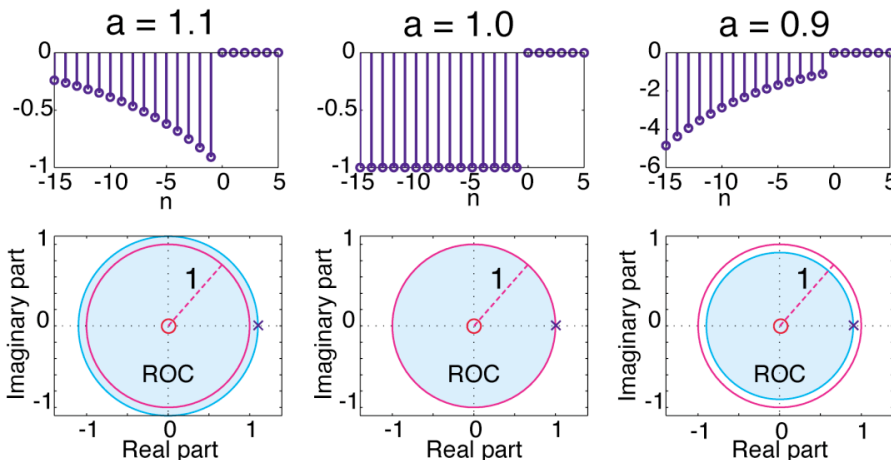
위식과 이 식의 등식은 ROC 내에서 성립한다.

9

이 등식은 ROC내에서 성립하지 않는다. 0에서 성립하지 않기 때문이다. 하지만 편의상 $x[n]$ 의 ZT이 $1/(1 - az^{-1})$ 이고 ROC가 $|z| < |a|$ 라고 말한다. 조금 문제가 있는 표현인데 ZT과 관련 하여서는 이런 식으로 표현하는 것이 convention이다. 다행인것은 pole과 zero를 찾기위해 $N(z)/D(z)$ 로 바꾸어보면 $z=0$ 은 zero이지 pole이 아니다. 따라서 여전히, "pole zero의 위치를 찾기 위해서는 $N(z)/D(z)$ 로 바꾸어 찾으려 한다"는 말이 옳다. 다만 pole과 zero at infinity는 따로 주의해야 한다.

Example #2 (cont.)

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \text{ for } |z| < |a|.$$



ROC include $|z|=1$
stable

inside $|z|=1$
unstable

Observation: ROC includes $|z|=1 \Rightarrow$ stable.

이런 표현이

convention임을 명심하지 않으므로 ZT를 공부할 때 괴로울 것이다.

The signals are all left-sided and consequently the ROCs are all inside the circles.

The first one is DT Fourier transformable and its ROC contains the unit circle.

Rational z-Transform

$x[n]$ = linear combination of exponentials for $n > 0$ and for $n < 0$



$X(z)$ is rational

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \text{Polynomials in } z$$

— characterized (except for a prefactor) by its **poles and zeros**

11

pole zero의 위치를 알고 싶으면, 일단 기본적으로는 LT에서와 마찬가지로 정의하므로 반드시 분자 분모가 모두 z (not z^{-1})의 polynomial이 되게 한후, 즉 분모 분자에 z^M, z^N 을 곱한 후 인수분해한다.

만약 분모의 차수가 크면 " $|z| = \infty$ 에서 그 차수차만큼의 zero를 갖는다"라고 말하고

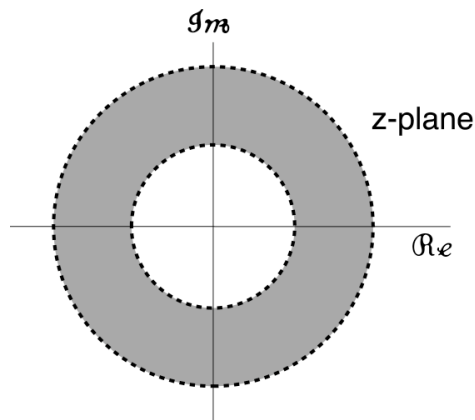
만약 분자의 차수가 크면 " $|z| = \infty$ 에서 그 차수차만큼의 pole을 갖는다"라고 말한다. 이 경우 $|z| = \infty$ 는 ROC에 포함될 수가 없다.

이렇게 $|z| = \infty$ 에서의 pole과 zero를 정의하면, z^{-1} 에 대해 rational인 ZT는 항상 같은 갯수의 pole과 zero를 갖는다!!!!!!!!!!!!!!

사실 LT에서도 pole and zero at infinity를 이상과 같이 정의할 수 있다.

Properties of the ROC

- 1) The ROC of $X(z)$ consists of a ring in the z -plane centered about the origin (**equivalent to a vertical strip in the s -plane**)



- 2) The ROC does **not** contain any poles (same as in $\mathcal{LT}$).

12

a_n 이 complex number일때, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ 은 any rearrangement가 수렴할때, 즉 $\sum |a_n|$ 이 수렴할때 수렴하는 것으로 정의되므로, (absolute summability = sum exists for any rearrangement) 어느 한 점 $z=c$ 가 ROC에 포함되면, $|z|=|c|$ 도 ROC에 포함된다.

$z=re^{j\theta}$ 로 생각해 보라.

ROC Properties (continued)

(3) If $x[n]$ is of **finite duration**, then the ROC is the **entire** z -plane, except possibly at $z = 0$ and/or $z = \infty$.

Why?

From
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

e.g.

CT counterparts

$\delta[n] \longleftrightarrow 1$	ROC all z	$\delta(t) \longleftrightarrow 1$	
$\delta[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}$	ROC $z \neq 0$	$\delta(t-T) \longleftrightarrow e^{-sT}$	$\text{Re}(s) \neq -\infty$
$\delta[n+1] \longleftrightarrow z$	ROC $z \neq \infty$	$\delta(t+T) \longleftrightarrow e^{+sT}$	$\text{Re}(s) \neq +\infty$

앞서 pole at infty 와 zero at infty의 정의에 따라

$1/z$ 는

pole at 0

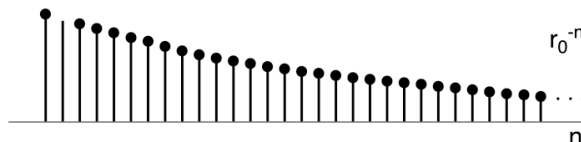
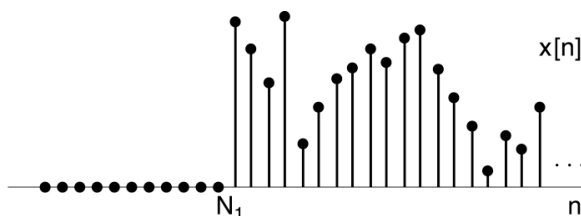
zero at ∞

앞서 pole at infty 와 zero at infty의 정의에 따라
 z 는 pole at ∞ 와 zero at 0 를 갖는다.

를 갖는다.

More Properties!

(4) If $x[n]$ is a **right-sided** sequence, and if $|z| = r_0$ is in the ROC, then all finite values of z for which $|z| > r_0$ are also in the ROC.



$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_0^{-n}$$

converges slower than



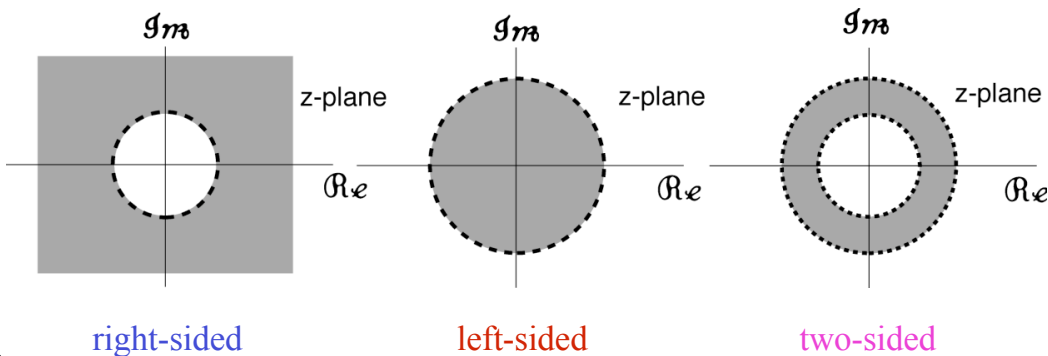
$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_1^{-n}$$

pole at infinity가 가능하므로 주의한다.

Side by Side

- (5) If $x[n]$ is a **left-sided** sequence, and if $|z| = r_0$ is in the ROC, then all finite values of z for which $0 < |z| < r_0$ are also in the ROC.
- (6) If $x[n]$ is **two-sided**, and if $|z| = r_0$ is in the ROC, then the ROC consists of **a ring** in the z -plane including the circle $|z| = r_0$.

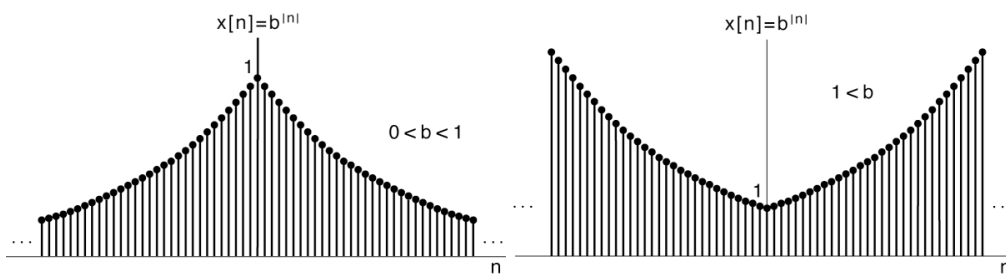
Quiz: What types of signals do the following ROC correspond to?



15

Example #3

$$x[n] = b^{|n|} \quad b > 0$$



Rewrite
$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

From:

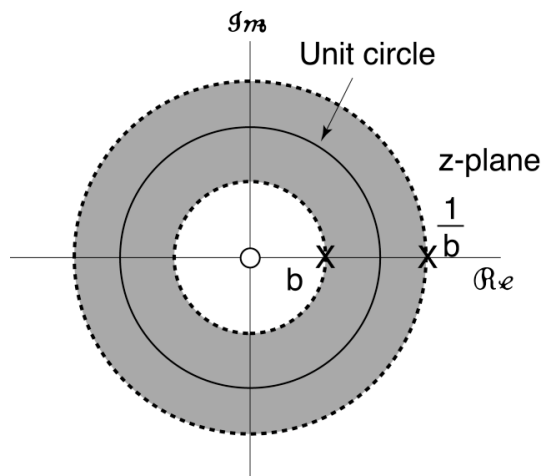
$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}} \quad |z| > b$$

and
$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{b}$$

16

Example #3 (continued)

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$



Clearly, ROC does *not* exist if $b > 1 \Rightarrow$ *No* z -transform for $b^{|n|}$.

17

Inverse z -Transforms

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}, \quad z = re^{j\omega} \in ROC$$

$\Downarrow$

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$\Downarrow$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) \underbrace{r^n e^{j\omega n}}_{z^n} d\omega$$

$$z = re^{j\omega} \Rightarrow dz = jre^{j\omega} d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{1}{j} z^{-1} dz$$

$\Downarrow$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad \text{— Will *not* use in EECE233}$$

LT에서는 inverse transform식이 differentiation property에서 쓰였다. 그렇다면 ZTF에서는?

18

Example #4 Q. 아래와 같이 $X(z)$ 가 주어지는 DT신호를 구하라.

$$X(z) = \frac{3z^2 - \frac{5}{6}z}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{3})} = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

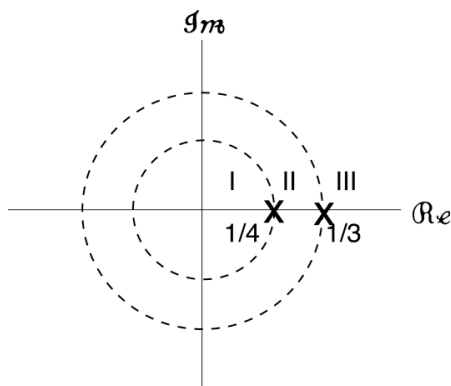
Partial Fraction Expansion Algebra:

$$A = 1, B = 2$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\updownarrow \qquad \qquad \updownarrow \qquad \qquad \updownarrow$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$



Note, unique for z -transform:

- 1) When finding poles and zeros, express $X(z)$ as a function of z .
- 2) When doing inverse z -transform using PFE, express $X(z)$ as a function of z^{-1} .

z 의 polynomial로 인수분해 해서는 PFE 을 해서 inverse ZT을 할 수 없다. 따라서 z^{-1} 의 polynomial을 인수분해 해서 PFE해야 한다. 그래서 왼쪽 것을 오른쪽 모양으로 바꾼후 PFE한다.

To find poles and zeros, 이 모양이 좋다.

To do inverse ZT, 먼저 z^{-1} 의 rational function으로 나타낸 후 PFE을 한다.

19

ROC III: $|z| > \frac{1}{3}$ — right - sided signal

$$x_1[n] = (1/4)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2 \cdot (1/3)^n u[n]$$

ROC II: $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ — two - sided signal

$$x_1[n] = (1/4)^n u[n]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot (1/3)^n u[-n - 1]$$

ROC I: $|z| < \frac{1}{4}$ — left - sided signal

$$x_1[n] = -(1/4)^n u[-n - 1]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot (1/3)^n u[-n - 1]$$

20

Inversion by Identifying Coefficients in the Power Series When $X(z)$ Has Finite Terms

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[n]} z^{-n}$$

$x[n]$ — coefficient of z^{-n}

Example #5: $X(z) = 3z^3 - z + 2z^{-4}$

$$x[-3] = 3$$

$$x[-1] = -1$$

$$x[4] = 2$$

$$x[n] = 0 \text{ for all other } n$$

— A finite-duration DT sequence

언제나 위와 같이 z^{-1} 의 rational function이 되는 것은 아니다. 예를 들어 z^{-1} 의 finite length polynomial이 될 경우가 있다. 이럴 경우의 inverse는 매우 간단하다.

$z=0$ 과 $|z|=\infty$ 를 제외한 모든 z -plane이 ROC이다.

21

Infinite terms가 있는 신호는

- 1) right-sided
 - 2) left-sided
 - 3) two-sided
- 로 나누어 ROC의 특성을 정리해보고

Finite terms가 있는 신호는

- 1) causal
- 2) anti-causal
- 3) neither

로 나누어 ROC의 특성을 확인해 보라. 특히 ROC가 $z=0$ 과 $z=\infty$ 를 포함하는지 여부에 주의하라.