

EECE233 Signals and Systems

Lecture Note #17

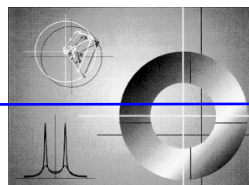
Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boming, D. Freeman, T.

Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O&W pp. 763-797
- Properties of z -Transforms
- System** Functions for DT LTI Systems
- Geometric Evaluation of z -Transforms and DT Frequency Responses
- First- and Second-Order Systems
- System Function Algebra and Block Diagrams
- Unilateral** z -Transforms

* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.



DT signals and ZT

DT LTI **systems** and ZT,

특히 LCCDE로 나타나는
DT LTI system

initial condition이 있는...

이를 이용하면 고등학교에서 배운 점화식의 일반항을 구하는 문제중 많은 문제를 쉽게 풀 수 있다.

1

Q. $X(z) = 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}$ 의 pole과 zero의 위치는?

A. z^{-2} 으로 묶어보면, $z=1$ or 2 에서 zero이고 $z=0$ 에서 2중 pole임을 알 수 있다.

Properties of z -Transforms

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

(1) Time Shifting

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

The **rationality** of $X(z)$ is unchanged, **different** from $\mathcal{L}\mathcal{T}$. ROC unchanged except for the possible addition or deletion of the origin or infinity

$n_0 > 0 \Rightarrow \text{ROC } z \neq 0$ (maybe)

$n_0 < 0 \Rightarrow \text{ROC } z \neq \infty$ (maybe)

z^{-n_0} 는 n_0 만큼의 delay를 나타낸다.

(2) z -D main Differentiation

$$nx[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

z 가 곱해지면 0에서의 pole이 cancel되거나 infinity에서 pole이 생긴다.

Derivation

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n-1}$$

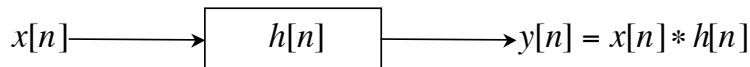
$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n}$$

QED

z^{-1} 가 곱해지면 0에서의 zero가 cancel되거나 infinity에서 zero가 생긴다.

2

Convolution Property and System Functions



$Y(z) = H(z)X(z)$, ROC at least the intersection of the ROC's of $H(z)$ and $X(z)$, can be bigger if there are pole/zero cancellation. *e.g.*

$$H(z) = \frac{1}{z - a} \quad |z| > a$$

$$X(z) = z - a \quad z \neq \infty$$

$$\Rightarrow Y(z) = 1 \quad \text{ROC all } z$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad \text{— The System Function}$$

FIR impulse response를 갖는 시스템에 finite duration signal을 가했을때 출력 구하는 것에 바로 이용할 수 있다.

3

CAUSALITY

(1) $h[n]$ right-sided $\Rightarrow$ ROC is the exterior of a circle possibly including $z = \infty$:

$$H(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

If $N_1 < 0$, then the term $h[N_1]z^{-N_1} \rightarrow \infty$ at $z = \infty$
 $\Rightarrow$ ROC outside a circle, but does *not* include ∞ .

$$\text{Causal} \Leftrightarrow N_1 \geq 0$$



A DT LTI system with system function $H(z)$ is causal $\Leftrightarrow$ the ROC of $H(z)$ is the exterior of a circle *including* $z = \infty$

non-causal FIR filter를 생각해 보라. pole 이 infinity에 있을 수 있으므로... 주의 한다.

예:
 신호 $x[n] = \delta[n+1]$ 은 causal이 아니고
 $X(z) = z$ 로 infy에서 pole를 갖는다.
 따라서 ROC는 infy를 제외한 전 영역이 된다.

사실 $|z| = \text{infy}$ 라는 위치가 C내에 존재하는 것은 아니므로 엄밀한 의미에서는 ROC가 entire z -plane이지만 ZT을 논할때는 일반적으로 $|z| = \text{infy}$ 에 대해 언급한다.

4

DT LTI Systems Described by LCCDE's

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Use the time-shift property

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$\Downarrow$

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad \text{--- Rational}$$

ROC: Depends on Boundary Conditions, left-, right-, or two-sided.
For Causal Systems $\Rightarrow$ ROC is outside the outermost pole

수학적으로 이 시스템은
linear일수도 아닐수도,
causal일수도 아닐수도,
stable할수도 아닐수도 있다.

5

Causality for Systems with Rational System Functions

$$H(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

$\Downarrow$ No poles at ∞ , if $M \leq N$

A DT LTI system with rational system function $H(z)$ is causal $\Leftrightarrow$ the ROC is the exterior of a circle outside the outermost pole, **including** ∞ . Thus

$$N \geq M$$

분자의 차수가 높으면 분자를 분모로 나누었을때, z 의 polynomial이 나온다. 이 둘이 non-causal한 term들을 만들어 낸다.

6

Stability

- LTI System Stable $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow$

ROC of $H(z)$ includes the unit circle $|z| = 1$

$\Rightarrow$ Frequency Response $H(e^{j\omega})$ (DTFT of $h[n]$) exists.

- A **causal** LTI system with rational system function is stable $\Leftrightarrow$ all poles are inside the unit circle, i.e. have magnitudes < 1 .

no pole at infty.

7

Geometric Evaluation of a Rational z-Transform

Example #1:

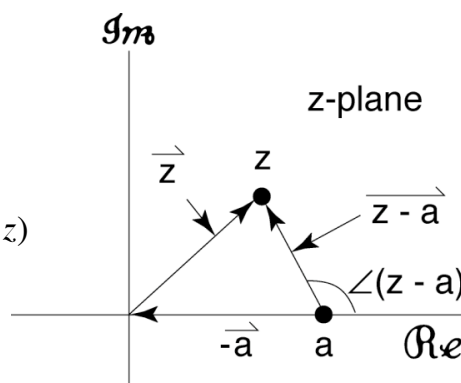
$X_1(z) = z - a$ — A first-order zero

Example #2

$X_2(z) = 1/(z - a)$ — A first-order pole

$$|X_2(z)| = 1/|X_1(z)|, \quad \angle X_2(z) = -\angle X_1(z)$$

Example #3:
$$X(z) = M \frac{\prod_{i=1}^R (z - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (z - \alpha_j)}$$



$$|X(z)| = |M| \frac{\prod_{i=1}^R |z - \beta_i|}{\prod_{j=1}^P |z - \alpha_j|}$$

$$\angle X(z) = \angle M + \sum_{i=1}^R \angle(z - \beta_i) - \sum_{j=1}^P \angle(z - \alpha_j)$$

LT에서와 완전히 parallel 하다.

8

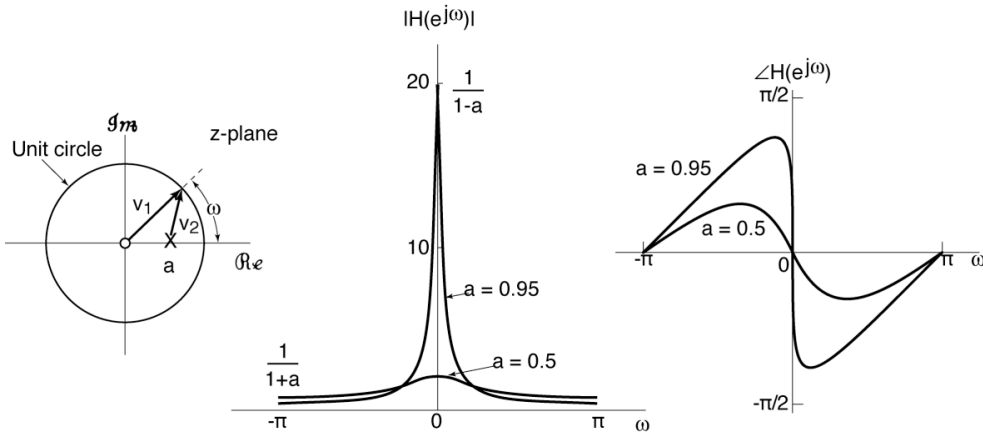
Geometric Evaluation of DT Frequency Responses

First-Order System
— one *real* pole

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

$$h[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

pole zero의 위치를 파악할 때와 마찬가지로, DTFT를 ZT를 이용해 이해할 때도 이 모양 (분자분모 모두 z 의 rational function 꼴) 으로 바꾼다.



$$H(e^{j\omega}) = \frac{v_1}{v_2}, \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{1}{|v_2|}, \quad \angle H(e^{j\omega}) = \angle v_1 - \angle v_2 = \omega - \angle v_2$$

9

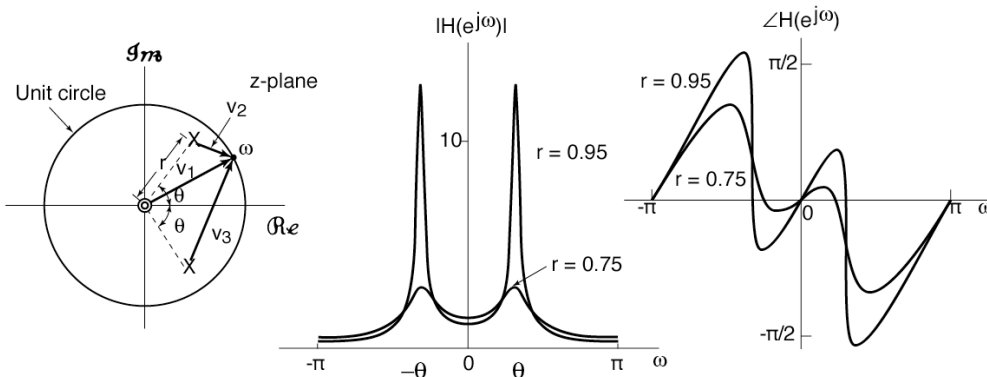
Second-Order System

Two poles that are a complex conjugate pair ($z_1 = re^{j\theta} = z_2^*$)

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

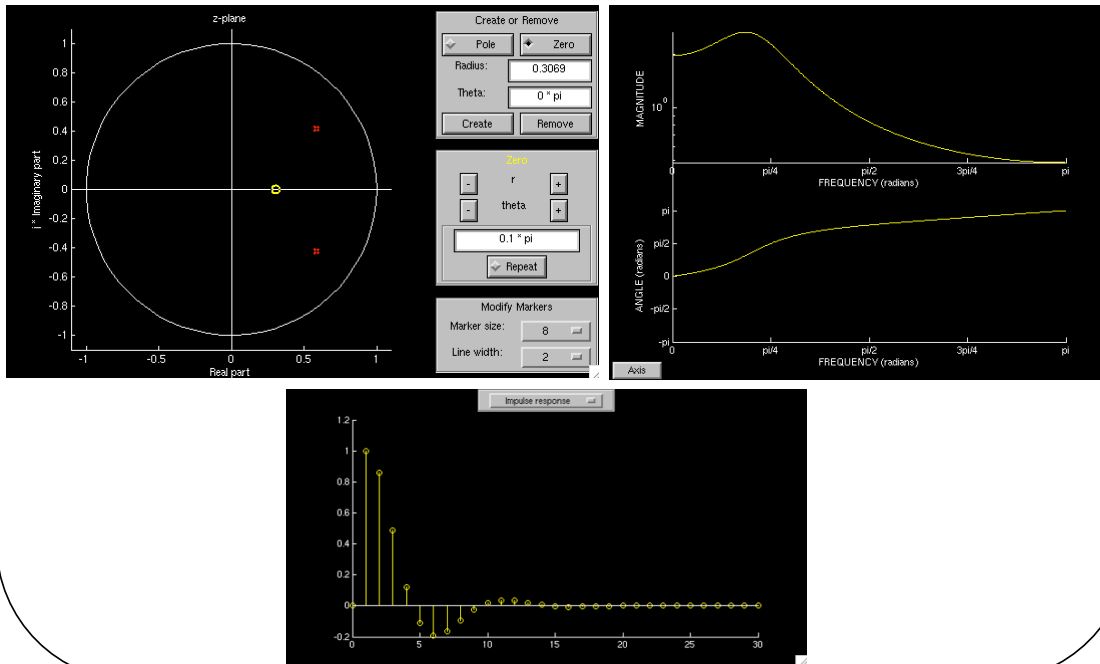
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{-j\theta})|}, \quad h[n] = r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u[n]$$

Clearly, $|H|$ peaks at $\omega = \pm\theta$ (remember the tent analogy).



10

Demo: DT pole-zero diagrams, frequency response, vector diagrams, and impulse- & step-responses

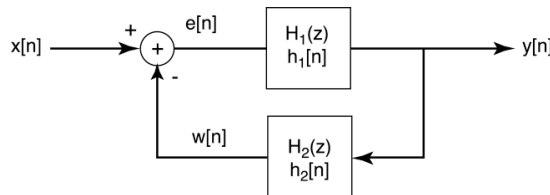


11

주어진 $H_1(z)$ system이 있는데 이 시스템이 **stable**하지 않다거나 하여 좀 변형을 하고 싶다. 이때 쓰는 방법이 보조 시스템 $H_2(z)$ 를 만들어 왼쪽과 같이 **피드백**하는 방법이다. 전체 system function이 전과 후로 어떻게 바뀌나 확인하라.

System Function Algebra and Block Diagrams

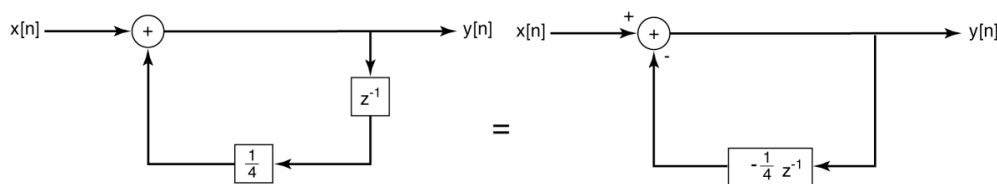
Feedback System (Causal systems)



Black's formula:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

Example #1:



$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

1/4은 다른 pole의 위치이다.

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

A delay in the **feedback** branch results in an **exponential** $h[n]$ — echo.

$Y(z) = (X(z) - Y(z)H_2(z))H_1(z)$
 $H_2(z)$ 에서 구하면 ...

feedback filter가 0이면 분자만 살아 남는다. -> 당연.

feedback의 역할은 $H_1(z)$ 였던 system function을

$H_1(z) / (1 + H_1(z)H_2(z))$ 로 바꾼다.

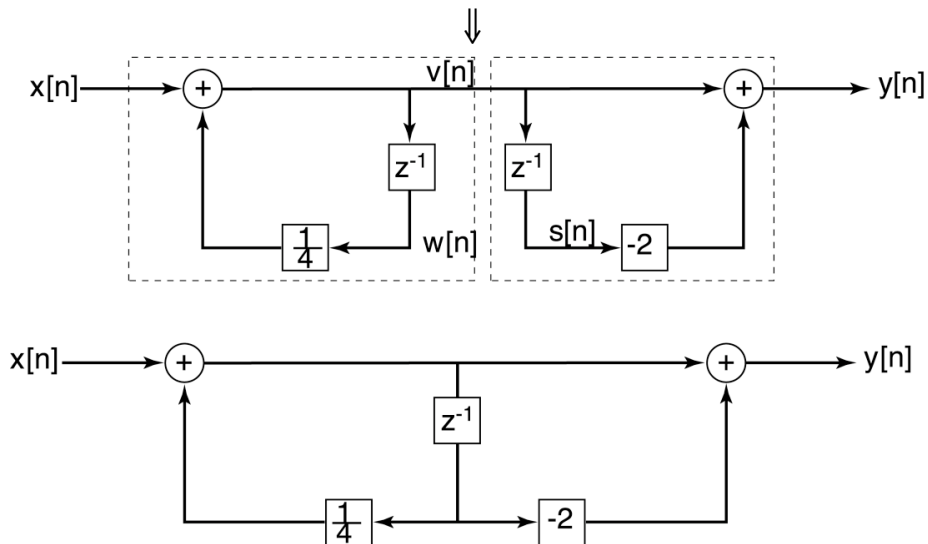
제어에서 많이 사용된다.

12

impulse response의 ZTF이 first order pole system이면, 이는 delay component가 하나인 feedback LCCDE로 나타난다.

Example #2:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right) (1 - 2z^{-1}) \quad \text{Cascade of two systems}$$



13

이제 UZT를 도입하여, 고등학교때 점화식 중에서 linear 했던 것들을 일반적으로 푸는 법을 배워보자.

Unilateral z -Transform – Many Parallels with $\mathcal{U}\mathcal{L}\mathcal{T}$

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

Note:

(1) If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then $\mathcal{X}(z) = X(z)$

(2) $\mathcal{U}\mathcal{Z}\mathcal{T}$ of $x[n] = \mathcal{B}\mathcal{Z}\mathcal{T}$ of $x[n]u[n]$
 $\Rightarrow$ ROC **always** outside a circle and **includes** $z = \infty$

(3) For causal LTI systems

$$\mathcal{H}(z) = H(z)$$

14

Properties of Unilateral z-Transform

Many properties are the same with $\mathcal{BZT}$ *E.g.*

- Convolution property (for $x_1[n < 0] = x_2[n < 0] = 0$)

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{UZ}} \mathcal{X}_1(z) \cdot \mathcal{X}_2(z)$$

- But there are **important differences**. For example, **time-shift**

$$y[n] = x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{UZ}} \mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1} \mathcal{X}(z)$$

Derivation:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-1] z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n-1] z^{-n} \\ &= x[-1] + z^{-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} x[n-1] z^{-(n-1)}}_{\mathcal{X}(z)} \quad \text{QED} \end{aligned}$$

여기서 $x[n]$ 은 반드시 causal인 것은 아니다. 그전에는 argument가 음수라서 살아남지 못했던 항이 delay를 주면 살아 나온다.

ULT에서 미분하면 초기값이 나타나는 것과 유사하다.

15

Use of $\mathcal{UZT}$'s in Solving Difference Equations with Initial Conditions

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

$$y[-1] = \beta, x[n] = \alpha u[n] \longleftrightarrow \frac{\alpha}{1-z^{-1}}$$

$\mathcal{UZT}$ of Difference Equation

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) + 2 \left[\beta + z^{-1} \mathcal{Y}(z) \right] &= \frac{\alpha}{1-z^{-1}} \\ \Downarrow \\ \mathcal{Y}(z) &= \underbrace{-\frac{2\beta}{1+2z^{-1}}}_{\text{ZIR}} + \underbrace{\frac{\alpha}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}}_{\text{ZSR}} \end{aligned}$$

ZIR – Output purely due to the initial conditions,

ZSR – Output purely due to the input.

Q. 왼쪽과 같이 LCCDE로 입출력관계가 모든 n 에 대해 성립할때, 만약 입력이 causal하여 우변이 causal하면 항등관계에 의해 좌변도 causal하다. 따라서 양변을 unilateral ZT해도 양변이 같아야 한다. 이를 이용하여 $y[n]$ 의 nonnegative n 에서의 값을 구하라.

주의: initial condition은 이 경우 $n=-1$ 에서의 값으로 주어진다!!!

16

Example (continued)

$\beta = 0 \Rightarrow$ System is initially at rest:

$$ZSR \quad \mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) = \underbrace{\frac{1}{1+2z^{-1}}}_{\mathcal{H}(z)} \underbrace{\frac{\alpha}{1+z^{-1}}}_{\mathcal{X}(z)}$$

$$\mathcal{H}(z) = H(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ Get response to initial conditions

$$ZIR \quad \mathcal{Y}(z) = -\frac{2\beta}{1+2z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y[n] = -2\beta(-2)^n u[n]$$

이와 같은 방식으로 피보나치 수열의 일반항을 구해보라.