EECE233 Signals and Systems

Lecture Note #3

Prof. Joon Ho Cho

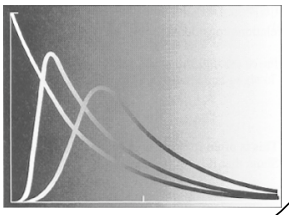
(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

- Covers O & W pp. 74-90, 104-108

1 Representation of DT signals in terms of shifted unit samples

2 Convolution sum representation of DT LTI systems

- Examples
- The unit sample response and properties of DT LTI systems



* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.

Lec. note #1에서는 signals에 대해, [1]
Lec. note #2에서는 systems에 대해 대략 배웠다.
이제 Lec. note #3에서는 discrete-time system에 대해 좀 더 자세히 배운다. 그렇다면 Lec. note #4에서는? -> continuous-time system에 대해 좀 더 자세히 배운다.

"representation"은 말 그대로
re-present하는 것이다. 즉, 같은 것을 다르게 나타내는 것이다.
(연구라는 단어 research도 re-search '또 찾아보는 것' 이라고들 한다.)

re-presentation은 수학적 조작 과정이나 논리 전개 과정에서
가장 중요한 방법중의 하나이다.
이 과목 뿐만 아니라 이론적인 과목들에서 중요한 개념이다. 명심!

본 lec. note 에서는
1. a DT signal의 a representation과
2. a DT LTI system의 a representation에 대해 배운다.

둘 다 매우 중요하다.

Exploiting Superposition and Time-Invariance

Exploiting Superposition = Linearity

Recall that a DT system is linear iff $x_k[n] \rightarrow y_k[n]$ for all k implies

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Question: Are there sets of "basic" signals $x_k[n]$ such that

a) We can represent *any* signal as a linear combination of these building block signals.

b) The responses of a linear system to these basic signals are both *simple* and *insightful*.

Fact: For linear systems (CT or DT) there are two natural choices for these building blocks

Focus for now: DT Shifted unit samples $\delta[n-n_o]$ the Kronecker delta function located at n_0

Next time: CT Shifted unit impulses $\delta(t-t_o)$ the Dirac delta function located at t_0

Dirac delta function은 distribution 또는 generalized function의 일종으로 엄밀한 의미에서의 function이 아니다. 수학에서는 function이 아니라 distribution이라 하여 다룬다.

Lecture note #3에서는 DT LTI system에 대해 보다 심도있게 배운다. 특히 time domain에서의 property를 배운다.

앞서 note #2의 마지막에서 system이 LTI system임을 이용하여 주어진 input-output example로 부터, 어떤 특별한 input이 주어졌을때 그 output을 구하는 것을 해 보았다. 여기서는 이 아이디어를 확장한다.

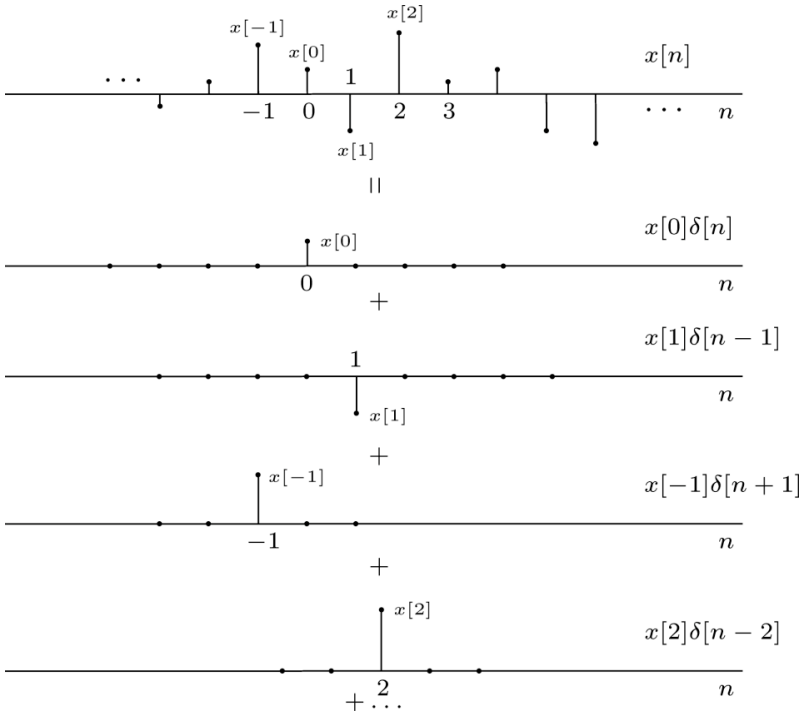
앞서 example에서의 핵심은 LTI = linear + time-invariant임을 기억하고 이를 이용하는 것이었다.

LHS->RHS 이 과정을 보다 정확히 쓰면

```
(y[n])_n = L( (x[n])_n )
         = L( (\sum_k a_k x_k[n])_n )
         = L( \sum_k a_k (x_k[n])_n )
         = \sum_k a_k L( (x_k[n])_n )
         = \sum_k a_k (y_k[n])_n
         = (\sum_k a_k y_k[n])_n
```

이다.

Representation/Decomposition of DT Signals Using Unit Samples



using scaled and shifted Delta functions

(\delta[n−a])_n 의 "그래프"는

(\delta[n])_n 의 "그래프"를 오른쪽으로 a만큼 이동한 것과 같다. 왜냐하면 argument가 0 지점에서만 1이기 때문이다.

That is ... x[k]delta[n−k]에서 k, −k로 부호가 반대인 것에 주의한다.

$$x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \ldots$$

$$\Downarrow$$

Important to note the "-" sign

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}} \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}} \quad \text{, for all n}$$

summand and integrand

cf) divisor vs. dividend

Q. RHS에서 countably infinite개의 실수의 합은 잘 정의되는가?

The Sifting Property of the Unit Sample

sift: 채로 치다. "shifting"이 아님.
(2001년에 대학원 강의에서 shifting이라고 했다가 망신당한 적이 있음.)

A. This representation of x[n] is well defined.
일반적으로 infinte sum이 나타나면 항상 주의해야 하나 다행히
여기서 x[n]의 infinite sum은 각 n에 대해 오직 한 term만이 nonzero이므로
convergence문제에 대해 걱정할 필요가 없다.
(countably infinite 개의 0과 x[k]를 더하는 것이므로 덧셈에 문제가 없다.)

Response of DT LTI Systems

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Def. Now suppose the system is **LTI**, and define the *unit sample response* $h[n]$:

unit sample response
=
impulse response

$$\delta[n] \longrightarrow h[n]$$

$$\Downarrow$$

(h[n])_n 은 DT signal로서, 주어진 system에 Delta[n]이 입력되었을때의 response이다.

Lemma. From Time-Invariance:

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

Theorem. From Linearity and Time-Invariance, the I/O rel. of an LTI system is

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]}_{\textit{convolution sum}} = x[n] * h[n]$$

Q1. RHS의 +- infinity로 가는 이 합은 어떻게 정의되는가?
Q2. 잘 정의되는가?

A1. 고등학교때 배운 sum of a sequence인 a series는 an ordered sum of real numbers였다. 그러나 위의 합은 a non-ordered sum of countably infinite real numbers 이다.

A2. 순서를 정하지 않은 countably infinite positive/negative real numbers의 합은 not well defined!!!
만약 모든 항이 non-negative 이면 잘 정의된다. a finite real number로 수렴하거나 diverges to infinity이다.
그러나 양수와 음수가 섞여 있다면 더하는 순서에 따라 수렴값이 달라질 수 있다.
주의. alternating series 의 수렴에 대한 정리...해석학에서 absolute convergence를 왜 배우는지 알겠다?!

Response of DT LTI Systems

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Def. Now suppose the system is **LTI**, and define the *unit sample response* $h[n]$:

unit sample response
=
impulse response

$$\delta[n] \longrightarrow h[n]$$

$$\Downarrow$$

(h[n])_n 은 DT signal로서, 주어진 system에 Delta[n]이 입력되었을때의 response이다.

Lemma. From Time-Invariance:

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

Theorem. From Linearity and Time-Invariance, the I/O rel. of an LTI system is

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]}_{\textit{convolution sum}} = x[n] * h[n]$$

Q. What is the impulse response of a DT linear system, not necessarily time invariant?
A. 일반적인 DT linear system의 impulse response는 (h[m,n])_n = L(\delta[n−m])_n.

자, 이제 output이 input과 impulse response의 convolution sum이 된다는 이 결과를 음미해 보자.

Very Important Property of LTI Systems:

Theorem. The output of *any* DT LTI System is a convolution of the input signal with the unit-sample response, *i.e.*

DT LTI <=>

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

엄밀히 말해

(y[n])_n =
(x[n])_n *
(h[n])_n

라 써야 하겠다
만 아무도 ...

As a result, any DT LTI Systems are *completely characterized* by its unit sample response

A characterizes B. 수학이 많이 나오는 이론에서 "characterize"라는 동사는 매우 중요한 용어이다. 예를 들어, random varibale 의 characteristic function은????

수식을 "음미" 또는 interpret할 수 있어야 한다.

이 식이 roughly 말하는 것은, "input이 무엇이든 그 output을 구하기 위해서는 input과 impulse response를 convolution하기만 하면 된다"는 것이다.
즉, "이 system의 모든 특성이 (h[n])_n에 담겨 있다"는 것이다. 이를 "DT LTI systems are completely characterized by its unit sample response"라고 표현하였다.

사실 화살표 왼쪽에서 오른쪽으로의 전환은 obvious하지 않다.

The statement
"By definition of an LTI system,
the left side implies the right side." 는 수학적으로 엄밀하게는 참이 아니다. -_-;

Why?

Q. What is the definition of the convergence of a series?

Q. What is the rearrangement of an infinite sum?

Q. What are the definitions of absolute convergence and conditional convergence of a series?

여기서 다시 infinite sum이 나타나는데, 일단은 y[n] 이 모든 n에 대해 수렴(?)한다고 생각하자.

Q. DT linear system의 arbitrary input과 time-varying impulse response의 관계는?

A. (y[[n])_n = L((x[n])_n)
= L(\sum_k x[k] (\delta[n-k])_n)
= \sum_k x[k] L((\delta[n-k])_n)
= \sum_k ((h[n-k])_n)x[k]
= (\sum_k h[n,k]x[k])_n
이다. time-invariance implies

L((\delta[n-k])_n) = (h[n,k])_n = (h[n-k])_n

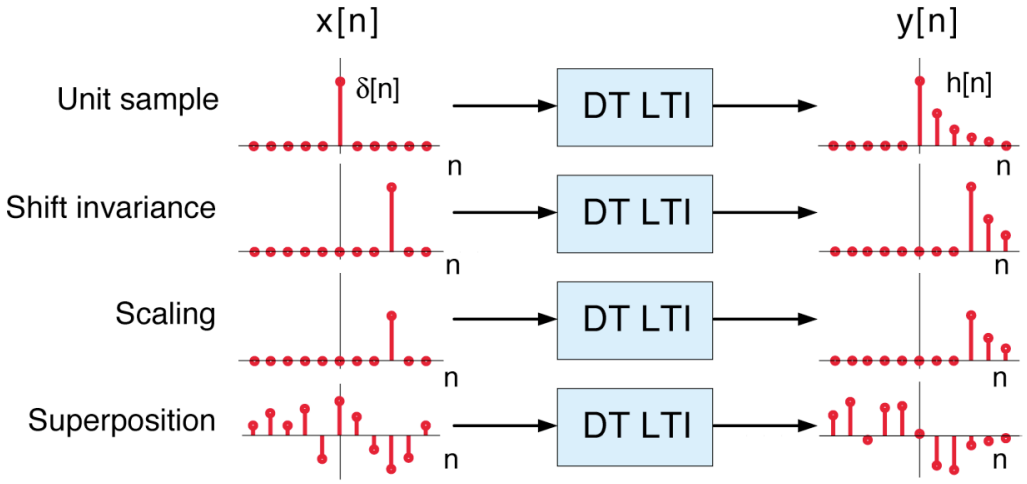
LTV system은 후에 대학원에서
time-varying channel model다룰때 다시 나온다.
그때, 배운 적 없다고 말하지 말 것!!!!

cf) input이 Nx1이고 output이 Nx1 인 linear system이 identity system일때 이 system을 matrix로 characterize하라.

Understanding what's going on using the graphs of the input and the output.

Graphic View of the Convolution Sum

Response of DT LTI systems



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \xrightarrow{\text{DT LTI}} y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]}_{\textit{convolution sum}}$$

7

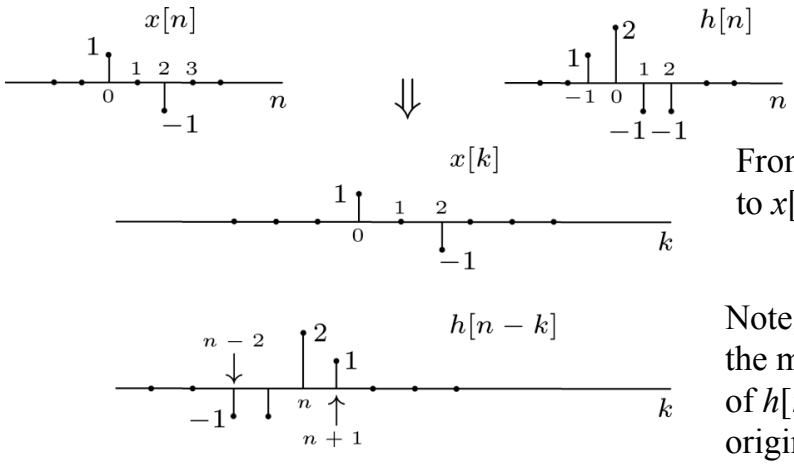
왼쪽 convolutin sum을 (y[n])_n = \sum_k x[k] (h[n−k])_n 로 보고 음미하면, output (y[n])_n은 weighted delayed impulse responses의 합이다. delay k일때의 weight은 x[k]이다.

Visualizing the calculation of $y[n] = x[n]*h[n]$

Choose the value of n and consider it fixed

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

View as functions of k with n fixed



From $x[n]$ and $h[n]$ to $x[k]$ and $h[n-k]$

Note, $h[n-k]$–k is the mirror image of $h[n]$–n with the origin shifted to n

8

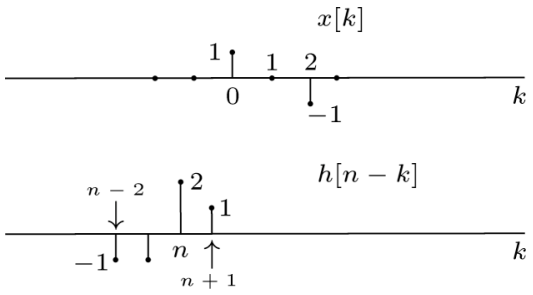
앞서의 slide에서는 linearity와 time−invariance를 이용하여 convolution sum을 이해하였고

여기서는 alternate way to understand인 sliding correlation interpretation of convolution sum을 이해한다.

두 방법 모두를 숙지해야 하면, 상황에 따라 어느 하나를 선택하면 이해하기가 쉽다.

Calculating Successive Values: Shift, Multiply, Sum

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$



각 시각에서의 출력을 계산하는 과정을, sliding correlation interpretation 을 통해 convolution sum을 계산해 내는 과정을 설명

$y[n] = 0$ for $n <$

$y[-1] =$

$y[0] =$

$y[1] =$

$y[2] =$

$y[3] =$

$y[4] =$

$y[n] = 0$ for $n >$

Examples of Convolution and DT LTI Systems

Ex. #1: $h[n] = \delta[n]$ Q. What is the response to x[n] when h[n]=delta[n]?

$$y[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$= x[n] \quad — \quad \text{An Identity system}$$

Q. What is the response to x[n] when h[n]=delta[n−n_0]?

Ex. #2: $h[n] = \delta[n - n_o]$

$$y[n] = x[n] * \delta[n - n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - n_o - k]$$

$$= x[n - n_o] \quad — \quad \text{A Shift}$$

Q. MATLAB 과제: Echo mic 의 구현과 관련됨..

Ex. #3 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ – An accumulator

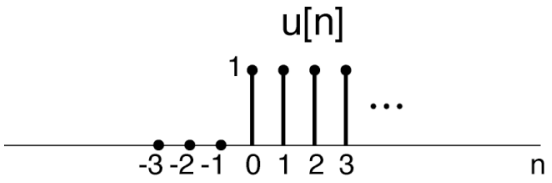
Q. What is the impulse response h[n] of this system?

Unit Sample response

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

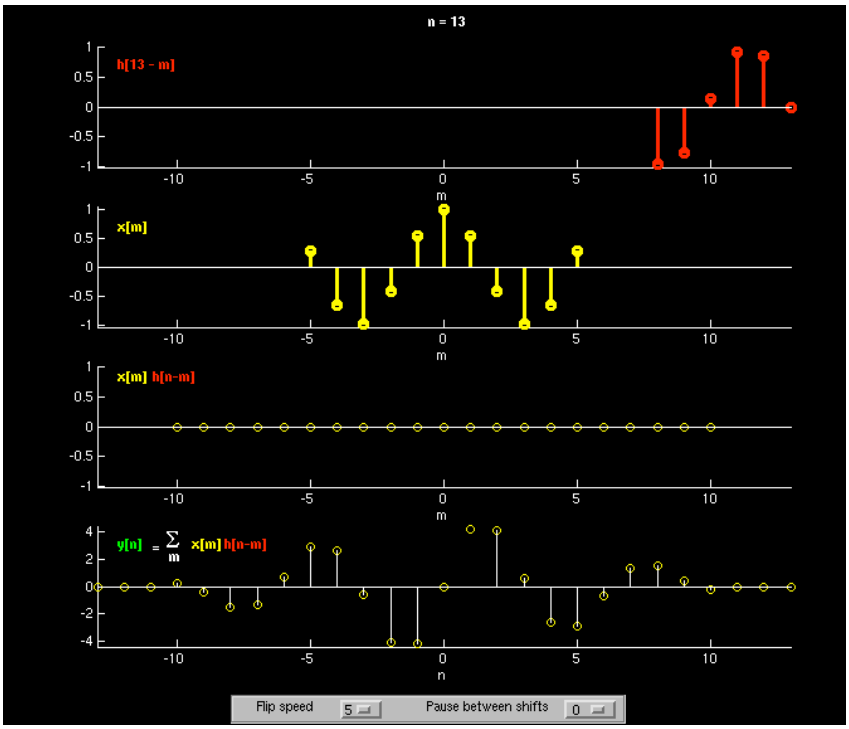


Convolution operation procedure:

$$h[k] \xrightarrow{\text{Flip}} h[-k] \xrightarrow{\text{Slide}} h[n-k] \xrightarrow{\text{Multiply}} x[k]h[n-k]$$

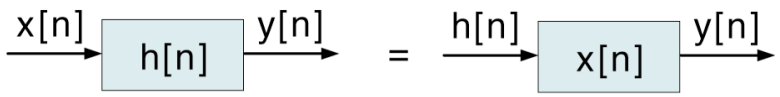
$$\xrightarrow{\text{Sum}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Demo: DT Convolution



Lemma. The Commutative Property of Convolution

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad = \quad h[n] * x[n]$$



impulse response와 system input은 서로 interchageable하다.

Def. The step response $s[n]$ of an LTI system is defined as ...

Lemma. $s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n]$

"Input" Unit Sample response of accumulator

$$\Downarrow$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

The step response can be obtained from the impulse response by the left equality.

Convolution sum의 commutativity를 이용하면, unit step response s[n]은 두가지로 interpret될 수 있다.

1. 말 그대로 system의 unit step function 입력에 대한 response.

2. system의 impulse response를 accumulator에 통과 시켰을 때의 output.

Q. How can you find the impulse response from the step response?

A. delta[n] = u[n]−u[n−1]. Therefore, h[n] = s[n] − s[n−1].

Q. 덧셈(addition)이란 무엇인가?
A. 덧셈이란, +: R^2 −> R 이다. 즉, two variable function 이다.
쉽게 말해 f(x,y)의 일종이다.

Q. f(x,y)들 중에서 특히 어떤 특성을 갖는 함수인가?
A. f(x,y) = f(y,x),즉 commutative하다.
같은 질문을 곱셈에 대해서도 해 보라. 뺄셈은? 나눗셈은?

commutativity property는 system이 LTI이면 성립한다. What about general linear systems?

앞서의 convolution sum의 두가지 interpretation을 다시 적용하면 결국 우리는 이제
convolution sum에 대한 4가지 다른 interpretation을 갖는다.

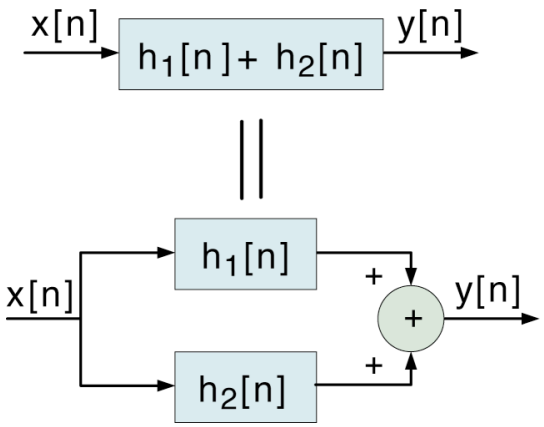
1.2. The output is the delayed and weighted sum of the input/IR.
3.4. The output is the sliding correlation between the input/IR and the time-reversed IR/input.

4가지 모두 중요하다!!!!!!
어떤 경우는 이 중 어느 하나가 이해하기 쉽고,
다른 어떤 경우는 이 중 다른 어느 하나가 이해하기 쉽다.

Lemma. The Distributive Property of Convolution

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Interpretation "하나의 DT LTI system을 parallel systems로 implementation이 가능하다."



14

Q. 곱셈 f(x,y)는 또 어떤 특성을 갖는가? 덧셈과 관련하여 설명하라.
A. f(x, h1+h2) = f(x, h1) + f(x, h2)

"interpretation"
"implication"
이 중요하다고 이미 강조 하였다.

수식이나 diagram을 그린 후 반드시 "말" 만으로 표현해 보라.

Q1. 이 property는 LTV system에서도 성립하는가?
Q2. 앞서의 commutativity는 LTV system에서 성립하는가?

Lemma. The Associative Property of Convolution

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

우변에서 먼저 시작하면,
먼저 system with h1[n]에 x[n]이 입력으로 들어가서 (x[n]*h1[n])이 출력으로 나온다. 이를 다시 system with h2[n]의 입력으로 사용하면 최종 출력은 (x[n]*h1[n])*h2[n]이 된다.

이제 associativity를 이용하면,
"cascade된 두 LTI system을 impulse response가 h1[n]*h2[n]인 하나의 LTI system으로 구현하면 equivalent 하다"는 것을 알게 된다.

Theorem. The associativity combined with commutativity leads to

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n] = (x[n]*h_2[n])*h_1[n]$$

f(x,y) = xy로 정의하면,
f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z)가 성립한다. 이때 f는 associative하다고 한다.

convolution sum도 associative property를 갖는 mapping rule이다.

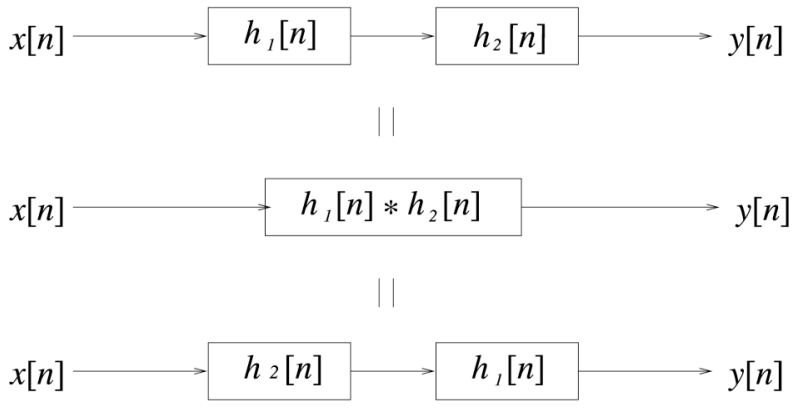
그렇다면 system analysis/design에서 이의 implication은?

여기서 commutativity와 associativity를 결합하면
"cascaded (serially connected) 된 두 LTI system의 순서를 바꾸어도 overall response는 바뀌지 않는다"는 결론에 도달한다.

LTI systems의 순서를 바꿔도 같지만, LTV는 일반적으로 그렇지 않다.

Q. modulator y(t) = x(t)cos(2\pi f_ct)는 LTI인가?

Implication (Very special to LTI Systems)



Properties of Convolution

Combining the Commutative property,

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad = \quad h[n] * x[n]$$

Distributive property,

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

and Associative property,

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

symbolically, we can treat "$*$" as a "$\times$". Easy, piece of cake!
The hard part is the actual calculation of the convolution.

Flip → Slide → Multiply → Sum.

Soon we will develop a clever way (*transformation*) to perform "$\times$" instead of "$*$" operation.

Flip-> Slide-> ..-> Sum은 convolution sum의 sliding correlation interpretation이다.

Def. 결론을 부정하여 이것이 가정과 모순됨을 보임으로써 조건명제가 참임을 증명하는 indirect proof방법을 "proof by contradiction" (귀류법)이라고 한다.

Def. 참임을 보이고자하는 조건명제의 대우명제가 참임을 보이는 indirect proof방법을 "proof by contraposition/contrapositive"이라고 함.

direct proof와 이들 indirect proofs는 논리적으로 동일한 방법하다.

Some Useful Properties of LTI Systems

1) Causality $\Leftrightarrow$ $h[n] = 0$ for all $n < 0$

Q. Prove this result.

2) Stability $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$

BIBO — Bounded Input ⇒ Bounded Output

Sufficient condition: For $|x[n]| \le x_{\max} < \infty$.

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \le x_{\max} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] \right| < \infty.$$

Necessary condition: If $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$

Let $x[n] = h^*[-n]/|h[-n]|$, then $|x[n]| \equiv 1$ bounded

But $y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*[-k]h[-k]/|h[-k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]| = \infty$

17

Def. An LTI system이 모든 bounded input에 대해 bounded output을 내면, "BIBO stable하다"고 한다.

Q. An LTI system이 BIBO stable하기위한 necessary and sufficient condition은 ?

Left to Right: proof of necessity

Right to Left: proof of sufficiency

A. 따라서, "the impulse response is absolutely summable"은 sufficient condition이 된다.

Note: the impulse response is absolutely summable하면, bounded input에 대해서 BIBO stable DT system의 y[n]이 각 n에서 absolutely summable한 infinte sum을 갖는다. 따라서 any rearrangement에서도 같은 값으로 수렴하므로 physically no problem이다.

Q. What is the difference between
\sum_{n=1}^{\infty} a_n
and
\sum_{n\in N} a_n?

Q. BIBO stable할 sufficient condition은? 즉, If an LTI system satisfies (....condition), then it is BIBO stable에서 (...condition)부분 즉 hypothesis 부분을 찾아라.

Note:
output이 bounded되어 있다는 말은, output y[n]의 각 n 값에서의 infinite sum이 수렴한다는 말이다.
physically meaningful하려면 any rearrangement에 대해서 같은 값으로 수렴해야 하는데