

EECE233 Signals and Systems

Lecture Note #9

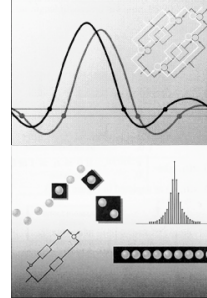
Prof. Joon Ho Cho

(Slides thanks to Qing Hu*, D. Boning, D. Freeman, T. Weiss, J. White, and A. Willsky)

앞서 Lecture Note #8에서 CT signal에 대해 FT와 inverse FT를 배웠다. 여기서는 이들의 properties에 대해 배운다.

- Covers O & W pp. 306-333, 358-361
- The convolution Property of the CTFT
- Frequency Response and LTI Systems Revisited
- Multiplication Property and Parseval's Relation
- The DT Fourier Transform

* These lecture notes are based on the lecture notes used in 6.003 taught by Prof. Qing Hu at M.I.T. These notes are adopted for EECE233 under the permission of Prof. Qing Hu.



The CT Fourier Transform Pair

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{— } x(t) \text{의 } FT$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \text{— } X(j\omega) \text{의 Inverse FT}$$

Last lecture: some properties

Today: further exploration

Convolution Property

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$\text{where } h(t) \longleftrightarrow H(j\omega)$$

Basically a consequence of the eigenfunction property

$$a e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(j\omega) a e^{j\omega t}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega \right)}_{\text{coefficient}} e^{j\omega t}$$

↓ superposition

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(H(j\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega \right)}_{\text{New coefficient}} e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(j\omega) X(j\omega)}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

이 성질은, two independent random variables의 합의 pdf는 두 pdf의 **convolution**이고, 따라서 two independent random variables의 합의 characteristic function은 두 characteristic functions의 곱이라는 성질을 연상시킨다.

Math: Convolution의 FT은 FT들의 Product이다.

EE: LTI system output의 CTFT는 input CTFT와 frequency response의 곱

The Frequency Response Revisited

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

↓

The frequency response $H(j\omega)$ of a CT LTI system is simply the Fourier transform of its impulse response $h(t)$

Now, we have a crude tool to design the impulse resp. of a filter.
1. Design the frequency response of the desired filter.

2. Find the inverse CTFT. Done!

Example #1:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

Recall

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

↓ inverse FT

$$y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Now it is clear to see frequency shaping effects of earlier demos.

이 결과로부터 phasor analysis 가 나온다.

linear circuit의 입력이 sinusoid일때 출력을 계산하기 위해서 굳이 differential equation을 풀 필요가 없이 algebraic equation을 풀면 해결이 된다.

Example #2: A differentiator

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{--- an LTI system}$$

From differentiation property $\Rightarrow \frac{d}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega$

$$\Downarrow \\ H(j\omega) = j\omega$$

1) Amplifies high frequencies (enhances sharp edges)

2) $+\pi/2$ phase shift ($j = e^{j\pi/2}$)

Larger at high ω_o phase shift

$$\frac{d}{dt} \sin \omega_o t = \omega_o \cos \omega_o t = \omega_o \sin(\omega_o t + \pi/2)$$

$$\frac{d}{dt} \cos \omega_o t = -\omega_o \sin \omega_o t = \omega_o \cos(\omega_o t + \pi/2)$$

phasor analysis에서
미분은 $j\omega$ 로
적분은 $1/(j\omega)$ 로
바꾼 것은 바로
Fourier transform의
성질 때문이었다.

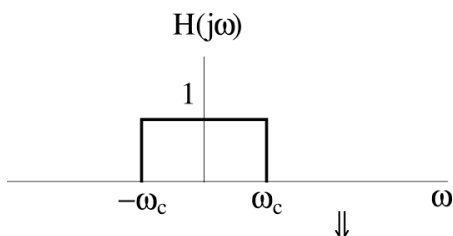
5

Example #2: Edge enhancement using DT differentiator



6

Example #3: Impulse Response of an *Ideal* Lowpass Filter



$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

Questions:

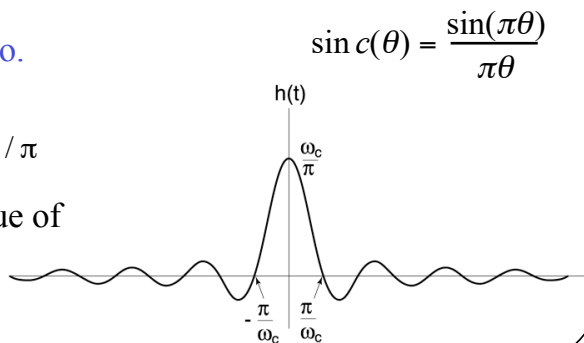
1) Is this a causal system? **No.**

2) What is $h(0)$?

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega = \omega_c / \pi$$

3) What is the steady-state value of the step response, i. e. $s(\infty)$?

$$s(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = H(j0) = 1$$



$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

7

Def. The **sine integral** is defined as $\text{Si}(x) = \int_0^x \sin(t)/t dt$

이것을 이용하여 CTFT에서의 Gibbs' phenomenon을 증명할 수 있다.

Q1. Is the square pulse an L^1 function?

A1. Yes.

Q2. Is the CTFT of the square pulse an L^1 function?

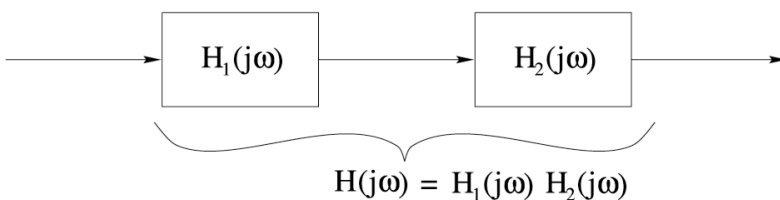
A2. No.

Q3. Is the CTFT of the square pulse an L^2 function?

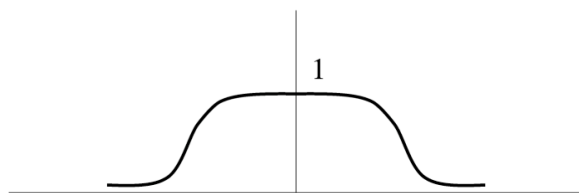
A3. Yes.

따라서 iFT은 존재하지 않지만 iFPT가 존재하고 MS sense로 $x(t)$ 가 된다.

Example #4: Cascading filtering operations



e.g. $H_1(j\omega) = H_2(j\omega)$



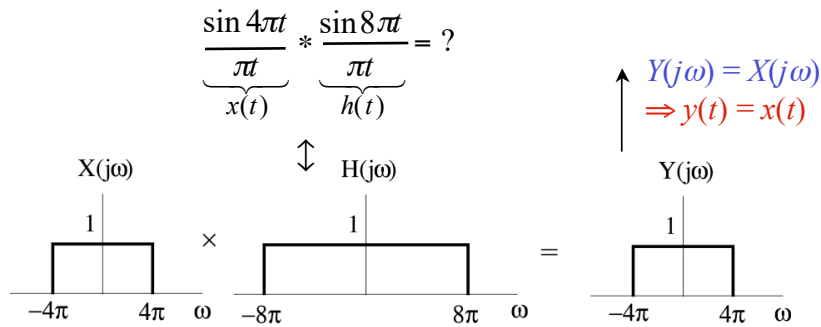
$H(j\omega) = H_1^2(j\omega)$ has a **sharper frequency selectivity**

convolution이 CTFT들의 곱으로 나타났으므로 당연한 결과이다

두 filter가 동일한 non-ideal LPF이면 resultant filter는 **더 narrow한** LPF이다.

중요: 시스템이 LTI이면 input에 없던 frequency 성분이 output에서 생겨나지 않는다.

Example #5:



Example #6:

$$e^{-at^2} * e^{-bt^2} = ?$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \times \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{\omega^2}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

Gaussian $\times$ Gaussian = Gaussian, Gaussian $*$ Gaussian = Gaussian

Q. $\int \text{sinc}(x) \text{sinc}(3x) dx = \pi$.
 $\int 1 \cdot 3 \cdot 5 = \pi$. Then, $\int 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 15 dx$?
 A. $< \pi$. Why?

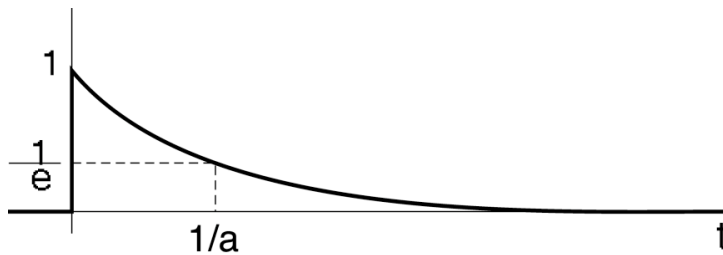
전자수학A에서, "두 independent Gaussian random variables의 합은 Gaussian random variable임을 보여라."는 문제를 풀때 characteristic function을 이용해서 푼다.

9

이 과목에서 가장 중요한 교훈(lesson):

time domain에서 잘 안되면 frequency domain에서 생각하라!!!! vice versa

Review from the last lecture, right-sided exponential



$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}} dt$$

$$= -\left(\frac{1}{a+j\omega} \right) e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \boxed{\frac{1}{a+j\omega}}$$

여기서 반드시 기억할 것은,

1) right-sided real exponential의 CTFT는 rational function of $j\omega$ 라는 것

2) $j\omega = s$ 라 놓으면 $1/(a+s)$ 가 되고 divide by zero error가 되는 s 값인 $-a$ 가 $x(t)$ 에서 e 의 exponent에 t 와 함께 곱해져 들어간다는 것이다.

Example #7:

$$h(t) = e^{-t}u(t), \quad x(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = ?$$

↓

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(2+j\omega)}$$

— a **rational function of $j\omega$** , ratio of polynomials of $j\omega$

↓ **Partial fraction expansion**

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}$$

↓ **inverse FT**

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

11

Example #8: LTI Systems Described by LCCDE's
 (Linear-constant-coefficient differential equations)

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Using the Differentiation Property

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longleftrightarrow (j\omega)^k X(j\omega)$$

↓ Transform both sides of the equation

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

↓

$$Y(j\omega) = \underbrace{\left[\frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \right]}_{H(j\omega)} X(j\omega)$$

1) **Rational**, can use PFE to get $h(t)$

2) If $X(j\omega)$ is rational i.e. $x(t) = \sum \alpha_i e^{-\beta_i t} u(t)$, then $Y(j\omega)$ is also rational

Q. 적분기는 어디있는가?

12

A. 치환하여 적분기를 없애 풀고 나서 다시 적분하면 된다. 또는 적분을 넣어서 풀어도 된다.

Q. 적분기의 frequency response는 무엇인가?

A. $1/(j\omega)$

=> phasor analysis가능...

Q. 고등학교 시험문제에 이 문제가 나왔다면?

A. time-domain에서 convolution하는 것은 고등학교 적분실력으로 할 수 있을 것이다. 시도해 보자. 그러나 이제는, ??? frequency-domain에서 할 수 있다!!!! 있어야 한다!!!

Q. 이제 **inverse FT** 을 해야 하는데 어떻게 하나?

A. **부분분수 분해**를 하여 다시 right-sided exponential function들의 FT이 $1/(a+j\omega)$ 임을 이용한다.

RLC circuit에서 입출력관계는 언제나 **LCCDE**로 나타낼 수 있다.

LCCDE라고 하여 언제나 LTI시스템을 나타내는 것은 아니며, **initial condition**에 따라 LTI system 이 아닐 수 있다.

frequency response가 **유리함수**이므로 **부분분수 분해**를 하여 inverse Fourier transform을 할 때 causality를 적용하면 impulse response들이 right-sided exponential function들로 나온다.

중요!!!

이제 우리는 원하는 CT LTI system의 CTFT를 design함으로써 원하는 system을 얻는 법을 배웠다.

그러나 실제로 구현하려면 쉽지않다. 예를 들어 LPF가 되도록 무얼가지고 어떻게 만들면 되는가?

여기서 보듯, LCCDE으로 input output relation을 만들면 circuit theory에서 배운 실력으로 system을 실제로 구현할 수 있는데, component수를 잘 조절하여 원하는 주파수 응답과 아주(?) close한 주파수 응답을 가지는 LCCDE를 만들어 linear circuit으로 구현하면 되겠다는 결론을 얻는다!!!!

Pade approximation!!!

See <https://www.youtube.com/watch?v=szMaPkJEMrw>

See <https://www.youtube.com/watch?v=Uzjx8uOL6as>

cf) Power series approximation

Parseval's Relation

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{\text{Total energy in the time-domain}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}_{\text{Total energy in the frequency-domain}}$$

Total energy in the time-domain

Total energy in the frequency-domain

$$\frac{1}{2\pi} |X(j\omega)|^2$$

— energy spectral density (ESD)

이를 energy spectral density라고 한다. 이유는??

적분해서 energy가 되니까.
그게 다일까?

어떤 주파수에서 very narrow bandpass filter를 만들면 그 출력의 에너지는 이 에너지스펙트럼밀도의 그 주파수 성분 곱하기 필터의 bandwidth가 된다.

Q. 유도해 보라.

Multiplication Property

Since **FT** is highly symmetric,

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

thus if

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$$

then the other way

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

around is also true

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta \quad \text{— Definition of convolution in } \omega$$

— A consequence of Duality

time domain에서의 곱은
frequency domain에서의
convolution

그런데 radian frequency
를 쓰면 2π 때문에 헷갈린
다.

그냥 Hz를 쓰면 간단하다.
 2π 어찌고하는 계수가 나
타나지 않는다.

13

Examples of the Multiplication Property

$$r(t) = s(t) \cdot p(t) \longleftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

Q. $s(t)$ 가 input이고 $r(t)$ 가 output일때 이 system은 linear인가? 만약 linear라면 LTI인가?

A. linear이나 nonzero ω 에 대해 LTI는 아니다. 주파수 성분을 보
면, input에 없던 성분이 생겨난다. 고로 LTI가 아니다.

For $p(t) = \cos \omega_0 t \longleftrightarrow P(j\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$

통신에서 up-conversion!

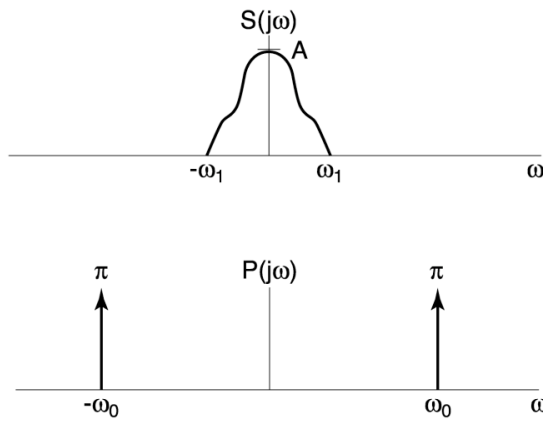


$$R(j\omega) = \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0))$$

14

Example (continued)

$r(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$
Amplitude
modulation (AM)



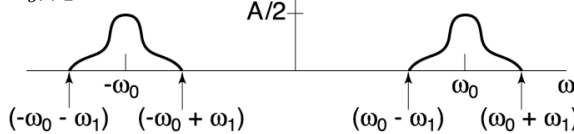
$$R(j\omega) = \frac{1}{2} [S(j(\omega - \omega_0)) + S(j(\omega + \omega_0))]$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

Drawn assume

$$\omega_0 - \omega_1 > 0$$

$$i.e. \omega_0 > \omega_1$$



15

Q. AM signal의 Fourier transform은?

A. $s(t)$ 의 FT를 좌우로 frequency shifting한 것.

=> radio station들의 frequency division duplexing법으로 서로 다른 주파수를 써서 주파수 영역에서 신호들이 overlap이 되지 않도록 한다.

Q. Time domain에서 생각해도 AM은 쉽게 이해할 수 있다.

즉

송신단에서는 메시지 신호 $s(t)$ 에 carrier 신호 $\cos[\omega_0 t]$ 를 곱하여 보내고

수신단에서는 수신신호

$$s(t-t_0)\cos[\omega_0(t-t_0)]$$

에 $\cos[\omega_0(t-t_0)]$ 를 곱하고 LFP하면 $s(t)/2$ 를 얻는다. Why?

그러나 $\cos[\omega_0(t-t_0)]$ 를 아는 것은 불가능하다. 따라서 그냥 $\cos[\omega_0 t + \theta]$ 를 곱하면 어떤 일이 벌어질까? 이 문제를 어떻게 해결할까? -> 정보통신공학개론을 보라.

Q. 여기서 $s(t)$ 가 음성신호라고 하고
 $\cos(\omega_0 t)$ 가 반송파 신호라고 하면 출력은?

A. AM signal

자 이제 DT signal을
complex sinusoids의 linear combination으로 나타내는 것을 생각하자.

앞서 CTFF에서 complex sinusoids 의 linear combination을 표현하기 위해
integral을 사용하였다:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

이제 DTFT에서 complex sinusoids의 linear combination을 표현하기 위해 여
전히

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

를 써야 할까?

$-\infty$ 에서 $+\infty$ 까지 필요없이 2π 주기 만큼만 필요하다. !!!!!

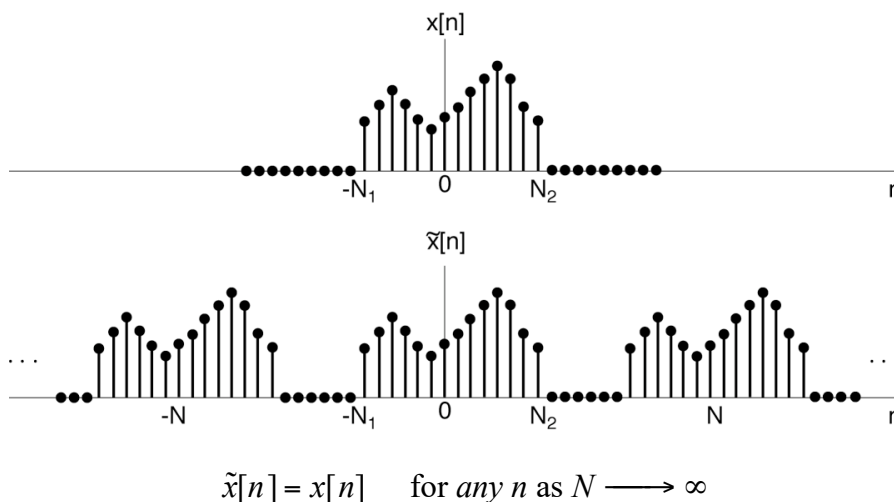
Q. 우리는 $x[n] = \int_0^{2\pi} a(\omega) e^{j\omega n} d\omega$
로 나타낼 수 있는 $x[n]$ 들의 집합을 알고 싶다.

A. 아무도 이 집합을 찾지 못했다. 단지 부분 집합들을 찾았을 뿐.

The Discrete-time Fourier Transform

Derivation: (Analogous to CTFT except $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n}$)

- $x[n]$ - aperiodic and (for simplicity) of finite duration
- N is large enough so that $x[n] = 0$ if $|n| \geq N/2$
- $\tilde{x}[n] = x[n]$ for $|n| \leq N/2$ and periodic with period N



DTFT Derivation (Continued)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

Define $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ — periodic in ω with period 2π

$\Downarrow$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

17

DTFT Derivation (Home Stretch)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \underbrace{\frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})}_{a_k} e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad (*)$$

As $N \rightarrow \infty$: $\tilde{x}[n] \rightarrow x[n]$ for every n

$$\omega_o \rightarrow 0, \quad \sum \omega_o \rightarrow \int d\omega$$

The sum in (*) $\rightarrow$ an integral

$\Downarrow$ The DTFT Pair

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{Synthesis equation}$$

$\uparrow$ Any 2π interval in ω

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{Analysis equation}$$

18