CM16v251103mon

2025년 10월 27일 월요일 09:34

MS periodicity vs. WS periodicity vs. Wide-sense cyclostationarity

2025년 10월 27일 월요일
09:34

ms periodicity

Mean-Square (MS) Periodic Random Processes

Probability and Stochastic Processes

November 3, 2025

1 Definition of an MS Periodic Random Process

A random process $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ is said to be **periodic in the Mean-Square (MS) sense** with period $T > 0$ if the following condition holds for all time t.

1.1 Mean-Square Convergence Condition

The mean-square error between the random variable at time t and the random variable at time $t+T$ is zero.

$$E[|X(t+T) - X(t)|^2] = 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}$$

Interpretation: This is a very strong condition. It implies that $X(t+T)$ and $X(t)$ are equal **with probability 1**. Consequently, almost every sample path (realization) of an MS periodic process is a **deterministic periodic function** with period T.

2 Key Statistical Properties

An MS periodic random process $X(t)$ exhibits strong periodic behavior in its key statistical moments.

2.1 Periodicity of the Mean Function

The mean function $m_X(t) = E[X(t)]$ is periodic with period T.

$$m_X(t) = m_X(t+T)$$

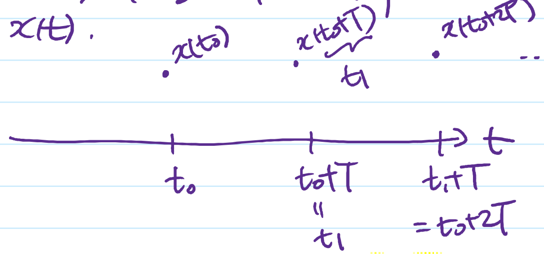
Proof Summary: This follows directly from the MS condition by applying the Schwarz inequality:

Def. A CT signal $x(t)$ is periodic

if $\exists T>0$ s.t. $|x(t)-x(t+T)|^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$x(t) = x(t+T), \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Here, T is called a period of $x(t)$.



$x(t_0) = x(t_0+kT), \ \forall k \in \mathbb{Z}$

The mean function $m_X(t) = E[X(t)]$ is periodic with period T.

$$m_X(t) = m_X(t+T)$$

Proof Summary: This follows directly from the MS condition by applying the Schwarz inequality: $|E[X(t+T)] - E[X(t)]|^2 \le E[|X(t+T) - X(t)|^2] = 0$.

2.2 Periodicity of the Autocorrelation Function

The autocorrelation function $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ is periodic with period T in both arguments, t_1 and t_2.

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 + T, t_2) = R_X(t_1, t_2 + T)$$

$R_X(t,s) = R_X(t+mT, s+nT)$

Reasoning: Since $P(X(t+T) = X(t)) = 1$, we can substitute $X(t_1 + T)$ with $X(t_1)$ inside the expectation to show $R_X(t_1 + T, t_2) = E[X(t_1 + T)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_1, t_2)$.

$x(t_0) = x(t_0 + kT), \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$

Def. $x(t) = x(t + kT), \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\exists T > 0.$

$= x(t + 2kT) \cdots$

Q. If T is period then kT is period? $k \in \mathbb{Z}$,

A. No. $k \in \mathbb{N}$.

5, -5

3 Relation to Wide-Sense Periodicity

The MS periodic condition is much stronger than that for a **Wide-Sense Periodic Process**.

- **Wide-Sense Periodic Process (WSP):** Only requires the mean function to be periodic and the autocorrelation function to be periodic in t_1 and t_2.
- **Conclusion:** An MS periodic process satisfies all conditions for a WSP process, but the reverse is not generally true. The MS condition guarantees a level of consistency in the sample paths themselves.

1

Def. The fundamental period of a periodic signal is defined as the smallest period of the signal.

Def. the fundamental frequency $= (\quad)^{-1}$

Q. The fundamental period always exists?

A. No!

ms 주기적

"pathological"

$x(t) = c \ \forall t$

$x(t) = x(t+T), \ \forall t \ \ \forall T > 0.$

MS 의미에서 주기적인 확률 과정 (MS Periodic Random Process)

No fundamental period.

$x(t) = \begin{cases} 0, & \forall \mathbb{Q} \\ 1, & \forall \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

has

$x(t_0 + T) = x(t_0)$

$\forall t_0, \ T \in \mathbb{Q}$

$x(t_1) = x(t_1 + T)$

$\forall t_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

확률 및 랜덤 프로세스 개론

November 3, 2025

1 MS 주기적 확률 과정의 정의

확률 과정 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$이 주기 $T > 0$를 갖는 **평균 제곱 (Mean-Square, MS) 의미에서 주기적**이라는 것은, 임의의 시간 t에 대해 $X(t)$와 $X(t+T)$ 사이의 평균 제곱 오차(Mean-Square Error)가 0임을 의미합니다.

1 MS 주기적 확률 과정의 정의

확률 과정 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$이 주기 $T > 0$를 갖는 **평균 제곱 (Mean-Square, MS) 의미에서 주기적**이라는 것은, 임의의 시간 t에 대해 $X(t)$와 $X(t+T)$ 사이의 평균 제곱 오차(Mean-Square Error)가 0임을 의미합니다.

has

$x(t_1) = x(t_1+T)$

$\forall t_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$T \in \mathbb{Q}$

1.1 정의 (Definition)

$T \in \mathbb{Q}, t$

확률 과정 $X(t)$가 주기 T를 갖는 MS 의미에서 주기적일 조건은 다음과 같습니다:

as a period

$$E[|X(t+T) - X(t)|^2] = 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}$$

의미: 이 조건이 만족되면, 확률 변수 $X(t+T)$와 $X(t)$는 **확률 1로 (with probability 1) 동일**합니다. 이는 곧 이 확률 과정의 **거의 모든 표본 경로(Sample Path)가 결정론적 주기 함수처럼 행동**함을 의미하는 매우 강력한 조건입니다.

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi k}{T_0}t}$

$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad$ $x(t) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

power series vs Taylor series representation

harmonic series $\quad$ FSR

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$ $\quad$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$

2 주요 통계적 성질 (Properties)

MS 주기적인 확률 과정 $X(t)$는 그 통계적 특성(평균 함수 및 자기상관 함수)이 주기 T를 갖는 함수 형태를 따릅니다.

f_0 $\quad$ $f_0 = \frac{1}{T_0}$

2.1 평균 함수의 주기성

MS 주기 과정의 평균 함수 $m_X(t) = E[X(t)]$는 주기 T를 갖습니다.

$$m_X(t) = m_X(t+T)$$

증명 요약: 슈바르츠 부등식(Schwarz inequality)과 MS 주기 조건 $(E[|X(t+T)-X(t)|^2] = 0)$을 이용하여 $|E[X(t+T)] - E[X(t)]|^2 \le E[|X(t+T) - X(t)|^2] = 0$임을 보일 수 있습니다.

$x(t) = x(t+T), \forall t$.

2.2 자기상관 함수의 주기성

MS 주기 과정의 자기상관 함수 $R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$는 각 변수 t_1과 t_2에 대해 주기 T를 갖습니다.

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1+T, t_2) = R_X(t_1, t_2+T)$$

$\boxed{x(t) = x(t+2T_0)}$ $\quad$ $\sum c_{2m} e^{j2\pi \frac{m}{2T_0}t}$

이유: $X(t+T)$와 $X(t)$가 확률 1로 같다는 사실 $P(X(t+T) = X(t)) = 1$을 이용하면 $E[X(t_1+T)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_2)]$가 성립합니다.

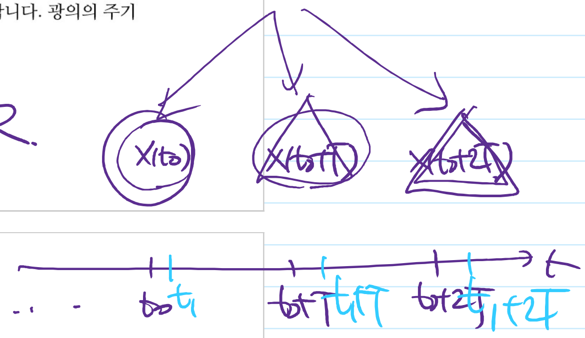
3 관련 개념: 광의의 주기성 (Wide-Sense Periodic)

Def. A r.p. $X(t)$ is MS periodic

MS 주기 과정은 광의의 주기 과정 (Wide-Sense Periodic Process)의 조건을 만족합니다. 광의의 주기 과정은 1차 및 2차 통계량의 주기성만을 요구하는 더 넓은 개념입니다.

- **광의의 주기 과정 조건:**

if $E\{|X(t) - X(t+T)|^2\} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$



Q. $X(t_0) = X(t_0+T)$, almost surely?

$E\{X(t_0)\} - E\{X(t_0+T)\}$

1. 평균 함수가 주기적이다: $m_X(t) = m_X(t+T)$
2. 자기상관 함수가 t_1과 t_2 각각에 대해 주기적이다: $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1+T, t_2)$

- **결론:** MS 주기 과정은 표본 경로 자체가 주기성을 가질 정도로 강한 조건이므로, 광의의 주기 과정의 모든 조건을 만족합니다.

$E\{|X - Y|^2\} = 0 \iff \Pr(\{X = Y\}) = 1.$

모든 조건을 만족합니다.

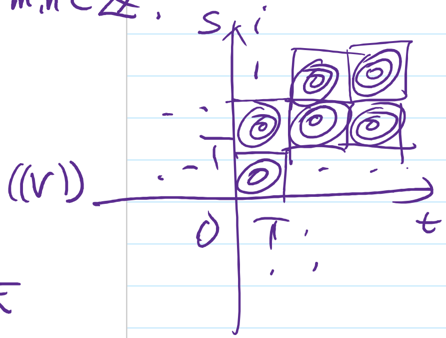
$$\underbrace{E\{|X-Y|^2\}=0}\iff \Pr(\{X=Y\})=1.$$

☐ Second-order properties of a RP

(i) $E\{X(t)\} \triangleq \mu_X(t)$
(ii) $E\{X(t)X^*(s)\} \triangleq R_{XX}(t,s)$

Q. When $X(t)$ is MS periodic

(i) $\mu_X(t)=\mu_X(t+T),\ \forall t$
(ii) $R_{XX}(t,s)=R_{XX}(t+mT,s+nT),\ \forall(t,s),\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$



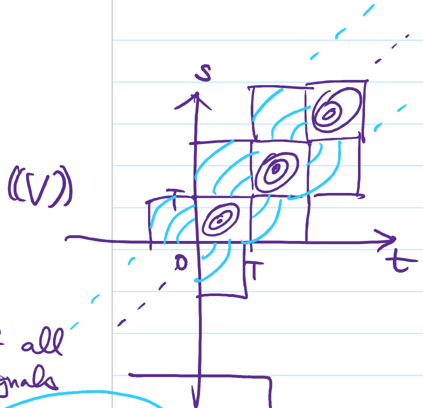
☐ Def. A CT RP $X(t)$ is WS periodic if

(i) $\mu_X(t)=\mu_X(t+T),\ \forall t,\ \exists T>0$
(ii) $r_{XX}(t,s)=r_{XX}(t+mT,s+mT),\ \forall(t,s),\forall m,n\in\mathbb{Z}$

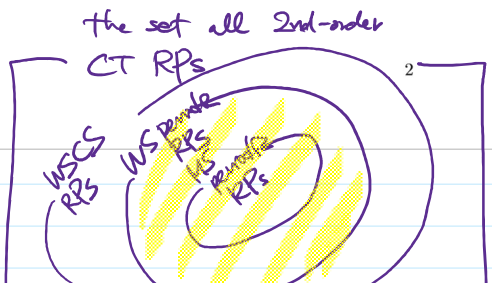
☐ Lemma. MS periodicity $\Longrightarrow$ WS periodicity. $\not\Longleftarrow$

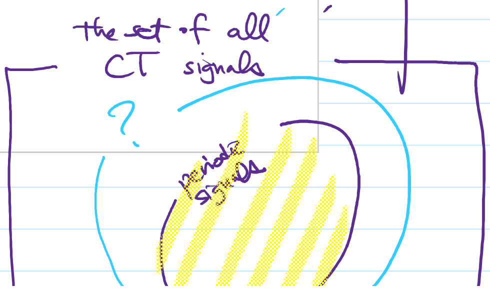
☐ Def. A CT RP $X(t)$ is $\boxed{\text{WS}}$CS if

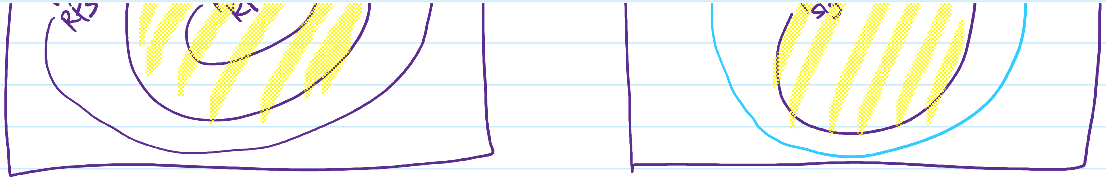
(i) $E\{X(t)\}=\mu_X(t)=\mu_X(t+T),\ \forall t\ \exists T>0,$
(ii) $C_{XX}(t,s)\triangleq E\{(X(t)-\mu_X(t))(X(s)-\mu_X(s))^*\}$
$= C_{XX}(t+T,s+T)\quad \forall(t,s),$
(ii) $r_{XX}(t,s)=r_{XX}(t+mT,s+mT).\quad \forall(t,s),\ \forall m\in\mathbb{Z}.$



☐







Shift-Invariant Subspace (SIS) and Its Generators

2025년 10월 27일 월요일
09:34

Shift-Invariant Subspaces (SIS) and Their Generators

Gemini AI Assistant

November 3, 2025

1 Definition of a Shift-Invariant Subspace (SIS)

A **Shift-Invariant Subspace (SIS)** S is a closed linear subspace of a function space (e.g., $L^2(\mathbb{R}^d)$) that is invariant under **integer translations (shifts)**.

$\|\phi(t)\| < \infty.$

$\boxed{(a_n)_n \in \ell^2}$

Lebesgue!

1.1 Invariance Condition

For every function f belonging to S, the function resulting from shifting f by an integer vector k must also belong to S.

$$\text{For all } f \in S \text{ and all } k \in \mathbb{Z}^d, \quad f(\cdot - k) \in S$$

This property is crucial for modeling signal analysis that is independent of absolute position.

$\boxed{\phi(t)}\boxed{T.}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \; a_n \in \mathbb{C}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, \phi(t - nT)$

a generator

a generating function.

$x(t+T)$

2 The Generator and Generation

An SIS, denoted as $S(\Phi)$, is defined by a countable set of **generating functions** (or **generators**) $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$.

2 The Generator and Generation

An SIS, denoted as $S(\Phi)$, is defined by a countable set of **generating functions** (or **generators**) $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$.

2.1 Generation Formula

The SIS is the **closed linear span** of all integer shifts of its generators.

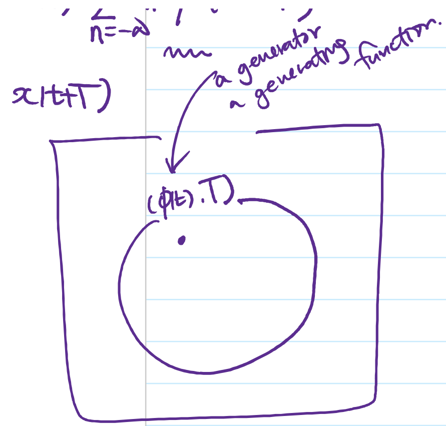
$$S(\Phi) = \overline{\text{span}\{\phi_j(\cdot - k) \mid \phi_j \in \Phi, k \in \mathbb{Z}^d\}}$$

2.2 Types of SIS

- **Principal Shift-Invariant Space (PSI)**: The subspace is generated by a **single function** ϕ.

$$S(\phi) = \overline{\text{span}\{\phi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}}$$

- **Finitely Generated SIS (FSI)**: The set of generators Φ is **finite**.



3 Application in Wavelet Theory

SIS forms the mathematical basis for **Multiresolution Analysis (MRA)**, the core structure used in constructing wavelets.

3.1 Multiresolution Analysis

MRA is a sequence of nested SIS spaces, V_j, representing different scales:

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$$

$(\phi_1(t), \phi_2(t), T)$

$(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_M(t), T)$

$\phi_m(t)$ is band-limited to $|f| \le \frac{W}{2}$.

$$x(t) = \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{m,n} \phi_m(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_1[n] \phi_1(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_2[n] \phi_2(t-nT)$$

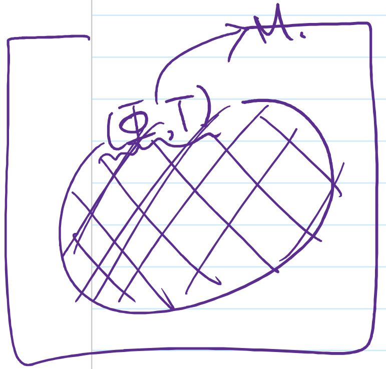
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_1[n] \phi_1(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_2[n] \phi_2(t-nT) + \cdots + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_M[n] \phi_M(t-nT)$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{b_m[n]}_{b_{m,n}} \phi_m(t-nT) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{m,n} \phi_m(t-nT)$$

1

3.2 Scaling and Wavelet Functions

- **Scaling Function** (ϕ): The base space V_0 is a PSI space generated by the ϕ.
- **Wavelet Function** (ψ): The difference space $W_j = V_{j-1} \ominus V_j$ is generated by the wavelet function ψ, which captures the detail (high-frequency) information between resolutions.



(f) ☐ Consider the set of H

(i) finite-energy &

(ii) band-limited to $|f| \le \frac{W}{2}$

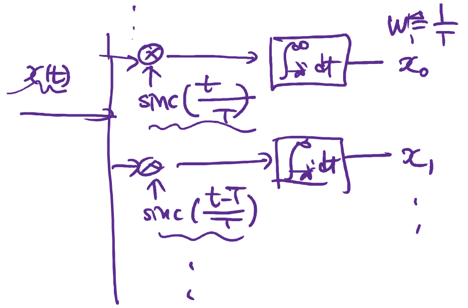
signals.

$x(t) \to \otimes \to \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt} \to x_0$, $W = \frac{1}{T}$

signals.

$x(t) \in H$

$\cong \mathbb{C}^N$



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

MS sense.

2

deterministic signals	RPs
finite-energy signals	2nd-order RP
bandlimitedness	
SIS (Φ, T)	WSCS (i) $\mu_x(t) = \mu_x(t+T), \forall t$ (ii) $r_{xx}(t,s) = r_{xx}(t+T, s+T)$ $\forall (t,s)$
periodic signal	MS periodicity WS 〃

SI 부공간

시프트 불변 부분 공간 (Shift-Invariant Subspaces, SIS)

시프트 불변 부분 공간 (Shift-Invariant Subspaces, SIS) 및 그 생성 함수

Gemini AI Assistant

November 3, 2025

1 시프트 불변 부분 공간 (SIS)의 정의

시프트 불변 부분 공간 (Shift-Invariant Subspace, SIS) S는 함수 공간 (예: $L^2(\mathbb{R}^d)$)의 **닫힌 선형 부분 공간**이며, **정수 이동(시프트)**에 대해 불변인 공간입니다.

1.1 불변성 조건

S에 속하는 모든 함수 f와 모든 정수 벡터 $k \in \mathbb{Z}^d$에 대해, f를 이동시킨 함수 $f(\cdot - k)$ 역시 S에 속해야 합니다.

$$\text{임의의 } f \in S \text{ 및 } k \in \mathbb{Z}^d \text{ 에 대해,} \quad f(\cdot - k) \in S$$

이 특성은 시스템의 위치에 관계없이 분석이 일정하게 유지되는 신호 모델링에서 핵심적입니다.

2 생성 함수 (Generator) 및 생성

SIS는 하나 이상의 **생성 함수 (Generator)** $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$에 의해 정의되며 $S(\Phi)$로 표기됩니다.

2.1 생성 공식

SIS는 생성 함수의 모든 정수 이동들의 **닫힌 선형 포락선(Closed Linear Span)**입니다.

$$S(\Phi) = \overline{\text{span}\{\phi_j(\cdot - k) \mid \phi_j \in \Phi, k \in \mathbb{Z}^d\}}$$

2.2 SIS의 종류

- **주요 시프트 불변 공간 (PSI, Principal SIS)**: 단일 함수 ϕ에 의해 생성되는 부분 공간입니다.
- **유한 생성 시프트 불변 공간 (FSI, Finitely Generated SIS)**: 유한 개의 함수 집합 Φ에 의해 생성되는 부분 공간입니다.

3 응용 분야: 웨이블릿 이론

SIS는 웨이블릿을 구성하는 핵심 구조인 **다중 해상도 분석 (Multiresolution Analysis, MRA)**의 수학적 기반을 제공합니다.

3.1 MRA 구조

MRA는 서로 포함 관계를 가지는 SIS 공간들의 연속적인 수열 V_j로 정의됩니다.

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$$

3.2 스케일링 및 웨이블릿 함수

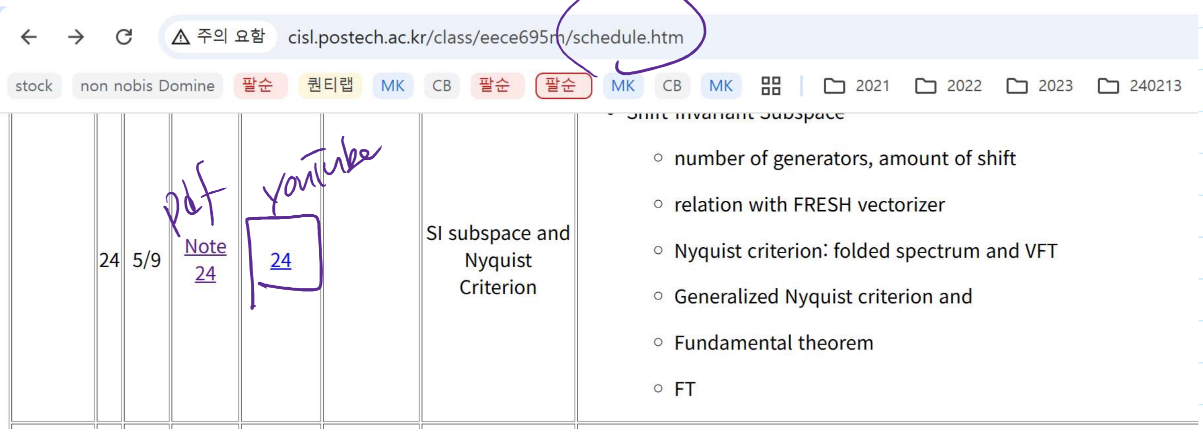
- **스케일링 함수** (ϕ): 기본 공간 V_0를 생성하는 **PSI 공간의 생성 함수**입니다. (Father Wavelet)
- **웨이블릿 함수** (ψ): 인접한 해상도 간의 차이 공간 $W_j = V_{j-1} \ominus V_j$를 생성하며, 신호의 세부 정보 (고주파 성분)를 추출하는 역할을 합니다. (Mother Wavelet)

Nyquist Criterion and Generalized Nyquist Criterion

2025년 10월 27일 월요일
09:34

http://cisl.postech.ac.kr/class/eece695m/schedule.htm

- Shift-Invariant Subspace
    - number of generators, amount of shift
    - relation with FRESH vectorizer
    - Nyquist criterion: folded spectrum and VFT
    - Generalized Nyquist criterion and
    - Fundamental theorem
    - FT

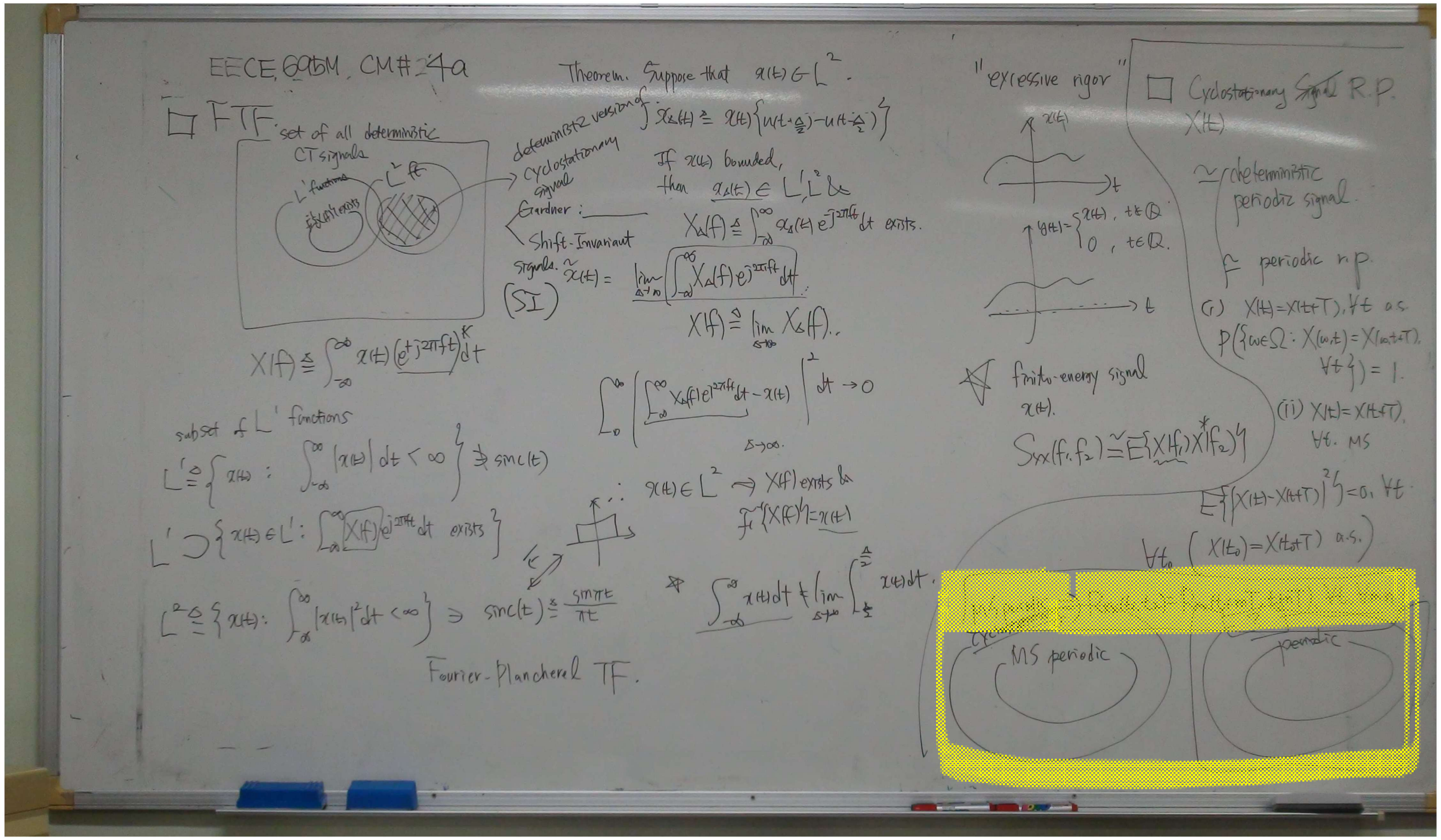


⚠ 주의 요함 cisl.postech.ac.kr/class/eece695m/schedule.htm

stock non nobis Domine 팔순 퀀티랩 MK CB 팔순 팔순 MK CB MK 2021 2022 2023 240213

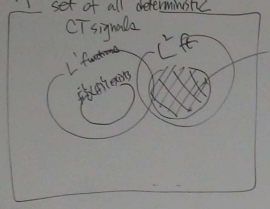
	24	5/9	pdf Note 24	youtube 24		SI subspace and Nyquist Criterion	Shift-Invariant Subspace ○ number of generators, amount of shift ○ relation with FRESH vectorizer ○ Nyquist criterion: folded spectrum and VFT ○ Generalized Nyquist criterion and ○ Fundamental theorem ○ FT

http://cisl.postech.ac.kr/class/eece695m/CM%2024.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=2uSxJ7zycu4


EECE 695M CM#24a
FTF
set of all deterministic CT signals
Theorem. Suppose that x(t) ∈ L²
If x(t) bounded, then x_Δ(t) ∈ L¹, L² &
X(f) ≜ lim X_Δ(f)
deterministic version of cyclostationary signal
Gardner
Shift-Invariant signals
(SI)
subset of L¹ functions
sinc(t)
Fourier-Plancherel TF.
"excessive rigor"
finite-energy signal x(t).
Cyclostationary R.P. X(t)
deterministic periodic signal
periodic r.p.
MS periodic
periodic

EECE 695M CM#24b

□ FTF



~~$SI(T) = \{ x(t) \in L^2 :$~~

~~$x(t) \in SI(T)$~~

~~$\Rightarrow x(t+nT) \in SI(T) \}.$~~

self referencing

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n p(t-nT)$$

$$(b_n)_n \in \ell^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 < \infty \right)$$

□ Generator $p(t) \in L^2$

L : Lebesgue

$$\left\{ x(t) : x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n p(t-nT),\ (b_n) \in \ell^2 \right\} \subset L^2$$

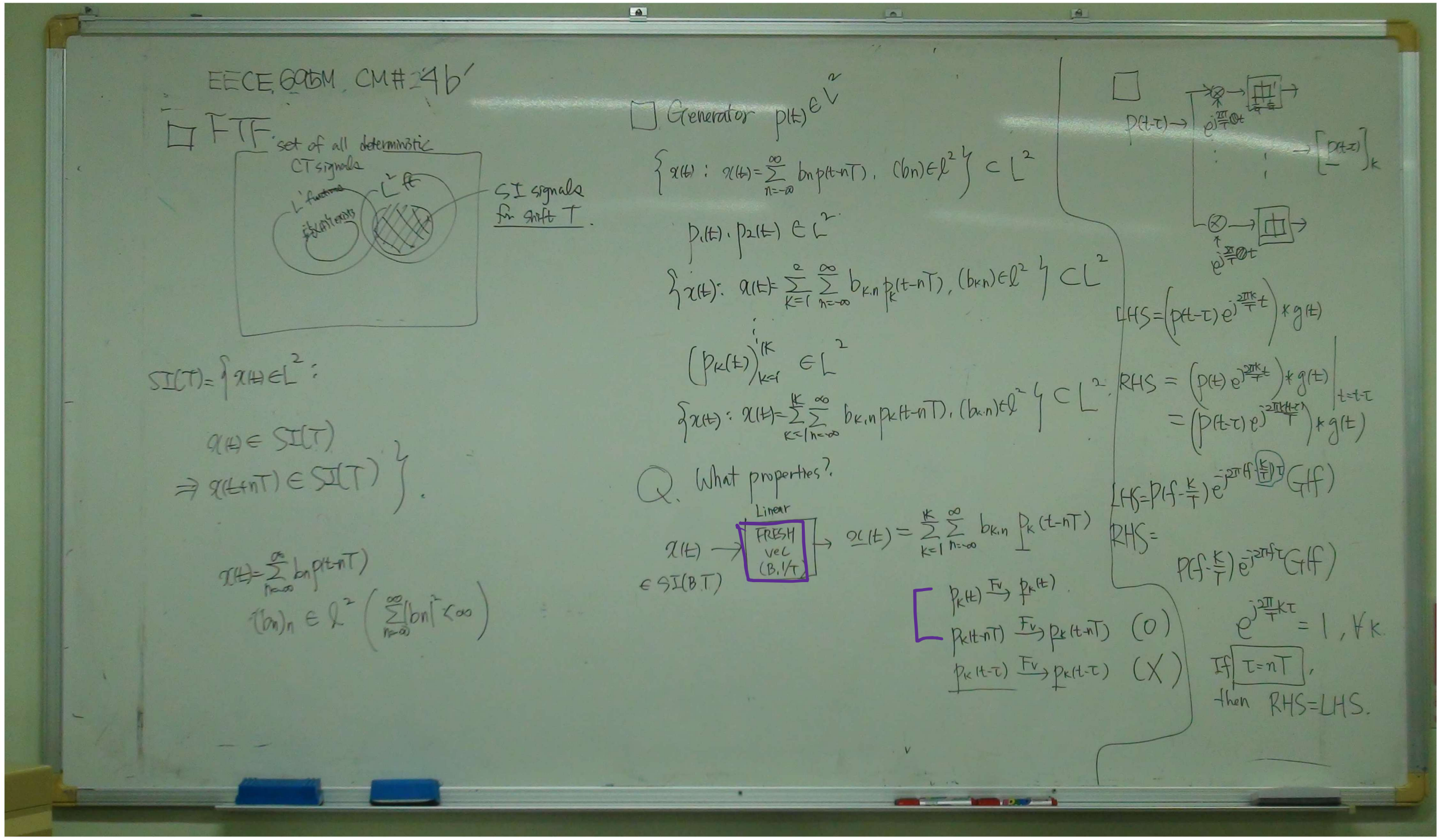
$$p_1(t),\ p_2(t) \in L^2$$

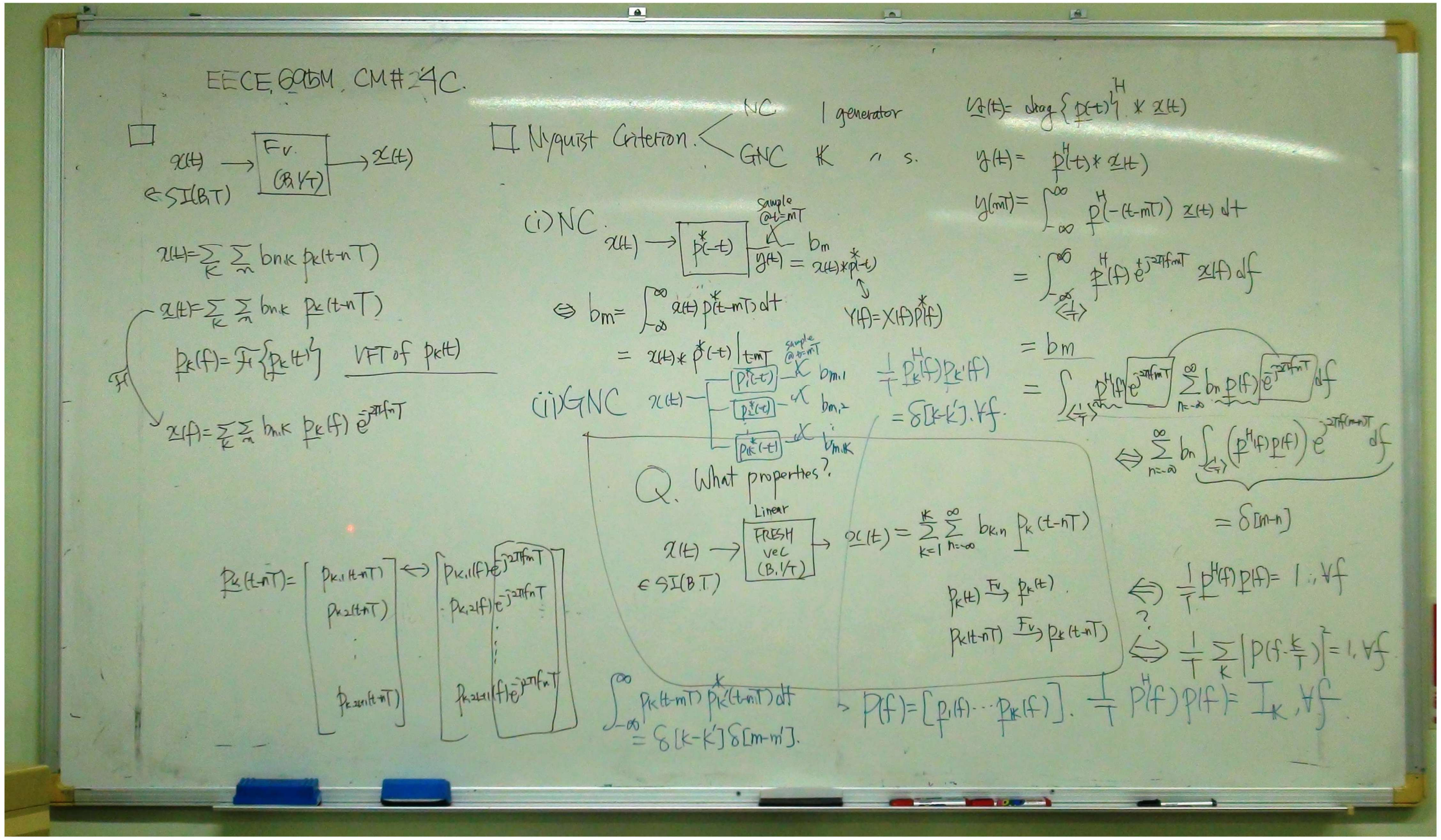
$$\left\{ x(t) : x(t) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{k,n} p_k(t-nT),\ (b_{k,n}) \in \ell^2 \right\} \subset L^2$$

$$\left(p_k(t) \right)_{k=1}^{K} \in L^2$$

$$\left\{ x(t) : x(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{k,n} p_k(t-nT),\ (b_{k,n}) \in \ell^2 \right\} \subset L^2.$$

Q. What properties?


EECE 695M CM#4b'
FTF
set of all deterministic CT signals
SI signals for shift T
SI(T) = { x(t) ∈ L² :
x(t) ∈ SI(T)
⇒ x(t+nT) ∈ SI(T) }
Generator p(t) ∈ L²
p₁(t), p₂(t) ∈ L²
Q. What properties?
Linear
FRESH
vec
(B, 1/T)
∈ SI(B T)
(O)
(X)
LHS =
RHS =
If τ = nT,
then RHS = LHS.



□ Q1. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \, p(t-nT)$

$\in \{1,-1\}$

$(b_n)_n \in \ell^2$

⋮

$$\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|P\left(\frac{f-m}{T}\right)\right|^2=1,\ \forall f. \qquad \frac{1}{T}\,p^H(f)\,p(f)=1,\ \forall |f|<\frac{1}{2T}$$

Q2.

$$x(t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_m[n]\,p_m(t-nT)$$

⋮

$$\frac{1}{T}\ ?\qquad =?\ \forall f. \qquad \frac{1}{T}\,\mathbb{P}^H(f)\,\mathbb{P}(f)=I_M,\ \forall |f|\le\frac{1}{2T}.$$

where $\mathbb{P}(f)=[\,p_1(f)\ p_2(f)\cdots p_M(f)\,]$